

Degenerate theories with higher derivatives

Hayato Motohashi

IFIC, University of Valencia



Based on collaborations with

Kobayashi, Langlois, Noui, Suyama, Takahashi, Yamaguchi

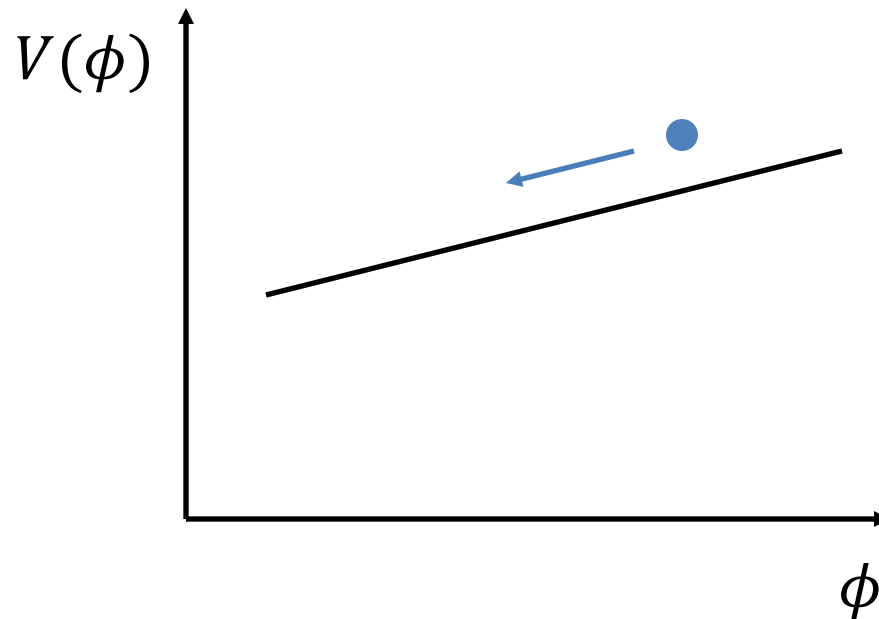
2017.03.08-10 Accelerating Universe Symposium



Description of accelerated expansion

Scalar-tensor theory

- Gravity + scalar field
- Lagrangian $\supset \partial\partial g, \nabla\nabla\phi$
- Screening mechanism: recover GR on small scales



Theories with 2nd order EL eq

Most general theories that yield 2nd order Euler-Lagrange equations:

Gravity

- ✓ Lovelock gravity (= GR in 4D)

Scalar-tensor theory

- ✓ Horndeski theory

2013

Scalar-tensor theories

Ostrogradsky Ghost

Horndeski theory

Dark energy

Inflation

$$f(\phi, X)R$$

$$G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi$$

Brans-Dicke

$$f(R)$$

$$X\Box\phi$$

$$K(\phi, X)$$

Ostrogradsky ghost

Ghost associated with higher derivatives.

$$L(\dot{Q}, Q, q) + \lambda(Q - \dot{q}),$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q} - \quad =$$

本橋隼人、

日本物理学会誌 Vol.71, No.11, 2016

<http://www.jps.or.jp/books/gakkaishi/>

オストログラドスキーの定理： 整合的な修正重力理論への道のり

Keyword: オストログラドスキーの定理

現代物理のキーワード
Keyword

1. 要旨

現代宇宙論における最大の謎の一つは宇宙の加速膨張を引き起こすダークエネルギーの正体であり、これを説明するために一般相対論に変更を加える修正重力理論の研究が近年注目されている。¹⁾ 一般相対論は太陽系スケールで精密に検証されており、今後はブラックホールや中性子星の連星合体時の重力波波形などからも検証が可能となる。そのような制限を満たしつつ、加速膨張を実現するために定性的に重力理論を変更する代表的な試みの一つが、一般相対論にスカラー場一つ加えたスカラー・テンソル理論である。スカラー場をどのような形でラグランジアンに導入すべきかは自明ではなく、理論的整合性のもとでどの程度一般相対論から拡張することができるかということが近年盛んに研究されている。理論的整合性の一つとして、「ハミルトニアンが下に有界であること」が要請される。ハミルトニアンは系のエネルギーを与えるため、もしこれが下に有界でない場合、エネルギーの最小状態が存在しないことになる。そのような系は通常の系との相互作用を考えた場合に不安定になるため、整合的な理論とはみなせない。有界でないハミルトニアンを引き起こす自由度をゴーストと呼ぶ。その中でも特に高階微分を含む理論で生じるものはオストログラドスキー・ゴーストまたは線形不安定性*¹⁾と呼ばれる。ゴーストの存在の有無を判定するための最も基本的な定理がオストログラドスキーの定理である。^{2,3)} この定理自体は、一般相対論の知識を用いず拘束系の解析力学の手法⁴⁾により理解できるため、本稿では定理の面白さと、最近の研究における応用を紹介したい。

2. オストログラドスキーの定理

まず簡単な例としてラグランジアン

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \quad (1)$$

を考えよう。これは自由粒子のラグランジアン $L = \dot{x}^2/2$ と似ているが、2階微分である点が異なる。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\ddot{x} = 0 \quad (2)$$

と4階微分方程式になり、系の時間発展を指定するために4つの初期条件を必要とする。通常の2階微分運動方程式では1自由度につき2本の初期条件が必要となるため、この数え方に焼き直せば、2つの自由度が存在することにな

る。この余分な1自由度がゴーストである。

これを明確に見るために、補助変数を導入した形

$$L = \dot{x}y - \frac{1}{2}y^2 \quad (3)$$

を考えよう。両者が等価であることは、 y に関する運動方程式 $y = \dot{x}$ を式(3)に代入すれば元のラグランジアンに帰着することから分かる。第一項を部分積分を用いて $-x\dot{y}$ に書き換え、変数の再定義 $z = (x+y)/\sqrt{2}$, $w = (x-y)/\sqrt{2}$ により運動項を対角化すると、

$$L = -\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\dot{w}^2 - \frac{1}{4}(z-w)^2 \quad (4)$$

となる。これより、2階微分運動方程式に従う2つの自由度があり、そのうち1つは負の運動エネルギーを持つことが分かる。ハミルトニアンは、

$$H = -\frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{2}p_w^2 + \frac{1}{4}(z-w)^2 \quad (5)$$

となり、正と負の運動エネルギーの項が同時に存在するため上下に非有界になっていることが見て取れる。この z の自由度がゴーストであり、特に今回のように高階微分に起因するものはオストログラドスキー・ゴーストと呼ばれる。このゴーストは、以下で見るように一般にハミルトニアンに運動量の線形項として現れることから、線形不安定性とも呼ばれる。

このように高階微分を含むラグランジアンは一般にゴーストを持つが、常に持つわけではない。より一般のラグランジアンに対してゴーストの有無の判定条件を与える定理がオストログラドスキーの定理である。オストログラドスキーの原論文²⁾は150年以上前に書かれたものだが、近年ウッタードの講義録³⁾で定理が紹介されてから広く認識されるようになった。この原論文はフランス語で書かれた130ページを超える大著であり、インターネット上では入手できないが、関西学院大学に蔵書が存在する。

では定理の中身を見てみよう。一般のラグランジアン $L(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ に対して、オストログラドスキーの定理の主張は「 $\partial^2 L / \partial \ddot{q}^2 \neq 0$ を満たす(ラグランジアンが非縮退であるという)とき、ハミルトニアンが上下ともに非有界となる」である。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}^2} \ddot{\ddot{q}} = (3\text{階微分以下}) \quad (6)$$

なので、ラグランジアンが非縮退であれば式(6)は4階微分方程式となり、系の時間発展を記述するために4本の初

Simple example: $L = \frac{1}{2} \ddot{x}^2$

1 DOF = 2 ini conds

- 4th order EL eq

$$\ddot{\ddot{x}} = 0$$

requires 4 initial conditions = 2 DOF.

- Hamiltonian is unbounded

$$z = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, w = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} L &= \ddot{x}y - \frac{1}{2}y^2 = -\dot{x}\dot{y} - \frac{1}{2}y^2 \\ &= \frac{1}{2}\dot{w}^2 - \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{4}(w-z)^2 \\ H &= \frac{1}{2}p_w^2 - \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{4}(w-z)^2 \end{aligned}$$

2 DOF = 1 healthy + 1 ghost

Problematic when coupled
to a normal system

Ostrogradsky theorem for $L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi)$

For Lagrangian $L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi)$ with $\phi = \phi(t)$,

$K \equiv \partial^2 L / \partial \ddot{\phi}^2 \neq 0 \Rightarrow H$ is unbounded.

Woodard, 1506.02210

↖ 'L is nondegenerate'.

- EL eq

$$K\ddot{\ddot{\phi}} + \dot{K}\ddot{\phi} = (\text{terms up to } \ddot{\phi})$$

$K \neq 0 \Rightarrow$ 4th order system = 2 DOF

- Hamiltonian is unbounded

Ostrogradsky theorem for $L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi)$

For Lagrangian $L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi)$ with $\phi = \phi(t)$,

$K \equiv \partial^2 L / \partial \ddot{\phi}^2 \neq 0 \Rightarrow H$ is unbounded.

Let us impose

$$K = 0$$

← Degeneracy condition

✓ Removes $\ddot{\phi}$ and $\dot{\phi}$ from EOM

✓ EL eq

$$K\ddot{\phi} + \dot{K}\dot{\phi} = (\text{terms up to } \ddot{\phi})$$

$K = 0 \Rightarrow$ 2nd order system = 1 DOF

✓ Hamiltonian is bounded

✓ The most general ghost-free Lagrangian is

$$L = \ddot{\phi}f(\dot{\phi}, \phi) + g(\dot{\phi}, \phi) = G(\dot{\phi}, \phi)$$

$\Rightarrow$ detailed model-dependent analysis

Eliminating Ostrogradsky ghost

$$\checkmark L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi) \Rightarrow L(\dot{\phi}, \phi)$$

$$\phi = \phi(t)$$

Eliminating Ostrogradsky ghost

$$\checkmark L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi) \Rightarrow L(\dot{\phi}, \phi)$$

$$\phi = \phi(t)$$

- $L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a)$

HM, Suyama, 1411.3721

Ostrogradsky ghost for $L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a)$

For $L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a)$ with $\phi^a = \phi^a(t)$ and $a = 1, \dots, n$,

$\det K \neq 0 \Rightarrow H$ is unbounded,

where $K_{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{\phi}^a \partial \ddot{\phi}^b}$.

↖ 'kinetic matrix'

- EL eq
$$K_{ab} \ddot{\phi}^b + (\dot{K}_{ab} + M_{ab}) \ddot{\phi}^b = (\text{terms up to } \ddot{\phi}^a)$$
$$M_{ab} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{\phi}^a \partial \dot{\phi}^b} - \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{\phi}^b \partial \dot{\phi}^a}$$

$\det K \neq 0 \Rightarrow$ 4th order system.

- H is unbounded.
 n healthy + n ghost DOF.

Eliminating Ostrogradsky ghost

For $L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a)$ with $\phi^a = \phi^a(t)$ and $a = 1, \dots, n$,

$\det K \neq 0 \Rightarrow H$ is unbounded,

where $K_{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{\phi}^a \partial \ddot{\phi}^b}$.

HM, Suyama, 1411.3721

Let us impose $K_{ab} = 0$

- EL eq

$$K_{ab} \ddot{\phi}^b + (\dot{K}_{ab} + M_{ab}) \ddot{\phi}^b = (\text{terms up to } \ddot{\phi}^a)$$

$$M_{ab} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{\phi}^a \partial \dot{\phi}^b} - \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{\phi}^b \partial \dot{\phi}^a}$$

Clearly, imposing $K_{ab} = 0$ is **no more sufficient**.

$K_{ab} = 0$, $\det M \neq 0$ (n : even) $\Rightarrow$ 3rd order system

- H is unbounded. $3n$ ini. conds. are required.

Eliminating Ostrogradsky ghost

For $L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a)$ with $\phi^a = \phi^a(t)$ and $a = 1, \dots, n$,

$\det K \neq 0$ or $\det M \neq 0 \Rightarrow H$ is unbounded,

where $K_{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{\phi}^a \partial \ddot{\phi}^b}$ and $M_{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{\phi}^a \partial \dot{\phi}^b} - \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{\phi}^b \partial \dot{\phi}^a}$.

Let us impose $K_{ab} = 0$ and $M_{ab} = 0$

✓ EL eq is 2nd order system

✓ H is bounded.

✓ The most general ghost-free Lagrangian: $L = G(\dot{\phi}^a, \phi^a)$

✓ It is possible to generalize the same logic to

$$L(\phi^{a(m)}, \phi^{a(m-1)}, \dots, \phi^a)$$

✓ Removes $\ddot{\phi}^a$

✓ Removes $\ddot{\phi}^a$

Eliminating Ostrogradsky ghost

$$\checkmark L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi) \Rightarrow L(\dot{\phi}, \phi)$$

$$\checkmark L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a) \Rightarrow L(\dot{\phi}^a, \phi^a)$$

HM, Suyama, 1411.3721

- So far,

Higher-order EL eq $\Rightarrow$ Ostrogradsky ghost

- The most general scalar-tensor theory that yields 2nd order EL eq: Horndeski theory

2013

Scalar-tensor theories

Ostrogradsky Ghost

Dark energy

Inflation

Horndeski theory
with 2nd order EL eq

$$f(\phi, X)R$$

Brans-Dicke

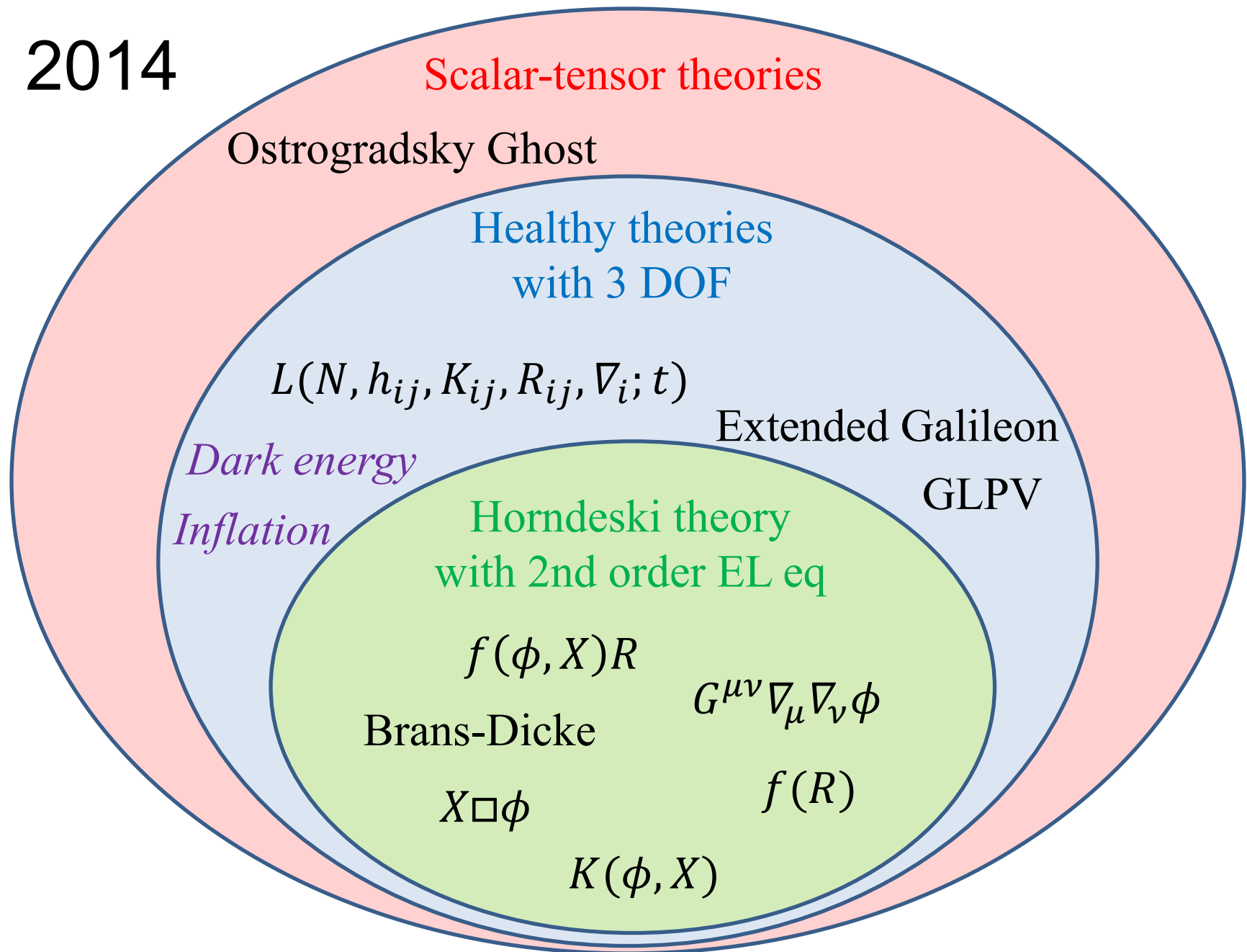
$$G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi$$

$$X\Box\phi$$

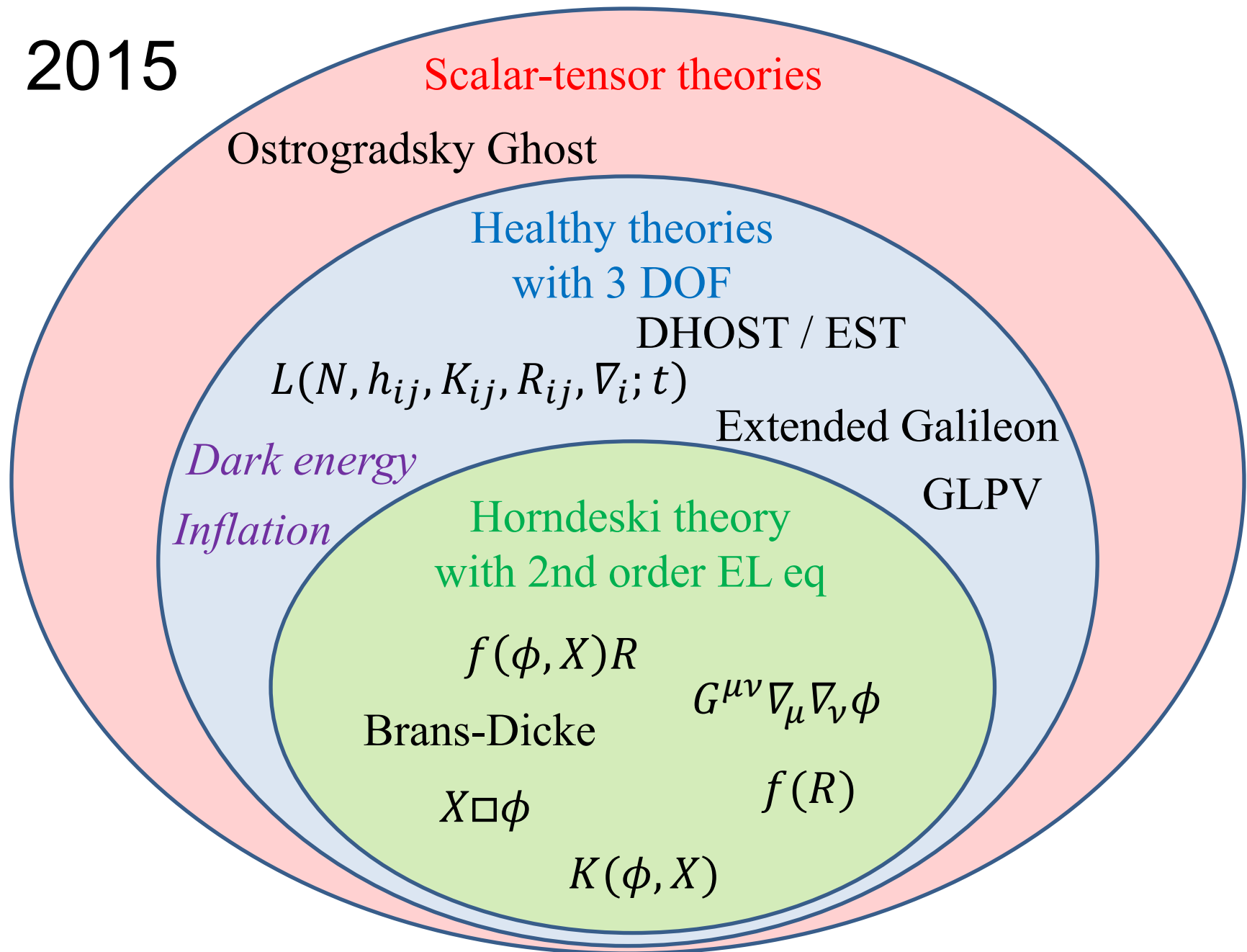
$$f(R)$$

$$K(\phi, X)$$

2014



2015



Eliminating Ostrogradsky ghost

$$\checkmark L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi) \Rightarrow L(\dot{\phi}, \phi)$$

$$\checkmark L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a) \Rightarrow L(\dot{\phi}^a, \phi^a)$$

HM, Suyama, 1411.3721

- For L with mixed order of derivatives ($\supset$ ST theory), the situation is crucially different.
 - If a set of higher-order EL eqs can be reduced to 2nd order system, the system does not suffer from Ostrogradsky ghost.
- $\Rightarrow$ There exists a healthy class of scalar-tensor theory beyond Horndeski

Example: $L = \frac{1}{2} (\dot{x} - \ddot{y})^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2$

✓ EL eq is a priori 4th order

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} - \ddot{y}) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}(\dot{x} - \ddot{y}) + \ddot{y} = 0$$

but can be rearranged to 2nd order system

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

✓ Invertible transformation

$$\begin{aligned} X &= x - \dot{y}, & Y &= y \\ (x &= X + \dot{Y}, & y &= Y) \end{aligned}$$

leads Lagrangian to

$$L = \frac{1}{2} \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \dot{Y}^2$$

✓ General invertible transformation in field theory

Example: $L = \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2}{1+\ddot{y}} + \frac{1}{2} \dot{y}^2$

Gabadadze, Hinterbichler, Khoury,
Pirtskhalava, Trodden, 1208.5773

✓ EL eq is a priori 4th order

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{1+\ddot{y}} \right) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\dot{x}^2}{(1+\ddot{y})^2} \right) + \ddot{y} = 0$$

but can be rearranged to 2nd order system

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

- Is it equivalent to $L = \frac{1}{2} \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \dot{Y}^2$?

At least, $X = x + a\dot{y}$, $Y = y$ cannot transform it.

- Is there some other transformation?

Not clear.

Eliminating Ostrogradsky ghost

$$\checkmark L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi) \Rightarrow L(\dot{\phi}, \phi)$$

$$\checkmark L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a) \Rightarrow L(\dot{\phi}^a, \phi^a)$$

HM, Suyama, 1411.3721

HM, Noui, Suyama, Yamaguchi, Langlois, 1603.09355

$$\checkmark L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi; \dot{q}, q)$$

$$\checkmark L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi; \dot{q}^i, q^i) \sim \phi + g_{\mu\nu}$$

$$\checkmark L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a; \dot{q}^i, q^i) \sim \phi^a + g_{\mu\nu}$$

$$L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi; \dot{q}, q)$$

HM, Noui, Suyama, Yamaguchi, Langlois, 1603.09355

$\phi(t), q(t)$ have different orders of derivatives.

Equivalent form

$$L(\dot{Q}, Q, \phi; \dot{q}, q) + \lambda(\dot{\phi} - Q).$$

Canonical momenta for ϕ and λ

$\Rightarrow$ 2 primary constraints

8 ini. conds.

From $P = L_{\dot{Q}}$ and $p = L_{\dot{q}}$ ($L_X \equiv \partial L / \partial X$)

$$\begin{pmatrix} \delta P \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\dot{Q}\dot{Q}} & L_{\dot{q}\dot{Q}} \\ L_{\dot{Q}\dot{q}} & L_{\dot{q}\dot{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \dot{Q} \\ \delta \dot{q} \end{pmatrix}.$$

kinetic matrix K

If $\det K \neq 0 \Rightarrow$ No further primary constraints.

We thus impose $\det K = 0$.

$$L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi; \dot{q}, q)$$

Several cases are possible. Let us consider the case

$$L_{\dot{q}\dot{q}} \neq 0, \quad \text{and} \quad L_{\dot{q}\dot{q}} - L_{\dot{q}\dot{q}}^2/L_{\dot{q}\dot{q}} = 0,$$

as q-system is nondegenerate and we focus on how the degeneracy cures ϕ -system.

Diagonalization

$$K = \begin{pmatrix} L_{\dot{q}\dot{q}}^2/L_{\dot{q}\dot{q}} & L_{\dot{q}\dot{q}} \\ L_{\dot{q}\dot{q}} & L_{\dot{q}\dot{q}} \end{pmatrix} = O^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_{\dot{q}\dot{q}}(L_{\dot{q}\dot{q}}^2/L_{\dot{q}\dot{q}} + 1) \end{pmatrix} O$$

Thus,

$$\delta P = \frac{L_{\dot{q}\dot{q}}}{L_{\dot{q}\dot{q}}} \delta p, \quad \delta p = L_{\dot{q}\dot{q}} \delta \dot{Q} + L_{\dot{q}\dot{q}} \delta \dot{q}$$

$$\Rightarrow P = F(p, q, Q, \phi)$$

$$L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi; \dot{q}, q)$$

The condition

$$L_{\dot{q}\dot{q}} \neq 0, \quad \text{and} \quad L_{\dot{Q}\dot{Q}} - L_{\dot{q}\dot{Q}}^2/L_{\dot{q}\dot{q}} = 0,$$

is equivalent to 1 primary constraint $P = F(p, q, Q, \phi)$

$\Rightarrow$ Additional 1 secondary constraint

$$\Rightarrow (8 - 2 - 2)/2 = 2 \text{ DOF.}$$

✓ 2 DOF, H is bounded.

✓ EL eq can be reducible to 2nd order system.

$$L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi; \dot{q}, q) \sim L(\dot{Q}, Q, \phi; \dot{q}, q)$$

✓ EL eq

$$\left\{ \begin{array}{l} L_q - \frac{dL_{\dot{q}}}{dt} = 0, \\ L_Q - \frac{dL_{\dot{Q}}}{dt} = \lambda, \\ L_{\phi} = \dot{\lambda}, \\ \dot{\phi} = Q, \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \textcolor{blue}{K} \begin{pmatrix} \ddot{Q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V - \lambda \\ v \end{pmatrix} \\ \lambda = V - F_p v \\ L_{\dot{q}\dot{q}}(\ddot{q} + F_p \ddot{Q}) = v \end{array}$$

$$\Rightarrow (L_{\dot{q}Q} - L_{\dot{Q}q})(\ddot{q} + F_p \ddot{Q}) = w$$

$$\mathcal{E}_1 \equiv L_{\dot{q}\dot{q}}w - (L_{\dot{q}Q} - L_{\dot{Q}q})v = 0$$

From $\dot{\mathcal{E}}_1 = 0$ we can express $\ddot{\phi}$ in terms of 1st order derivatives

$\Rightarrow$

$$\mathcal{E}_2 = 0$$

2nd order eqs

Eliminating Ostrogradsky ghost

$$✓ L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi) \Rightarrow L(\dot{\phi}, \phi)$$

$$✓ L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a) \Rightarrow L(\dot{\phi}^a, \phi^a)$$

HM, Suyama, 1411.3721

HM, Noui, Suyama, Yamaguchi, Langlois, 1603.09355

$$✓ L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi; \dot{q}, q)$$

$$✓ L(\ddot{\phi}, \dot{\phi}, \phi; \dot{q}^i, q^i) \sim \phi + g_{\mu\nu}$$

$$✓ L(\ddot{\phi}^a, \dot{\phi}^a, \phi^a; \dot{q}^i, q^i) \sim \phi^a + g_{\mu\nu}$$

HM, Suyama, Yamaguchi, in progress

$$✓ L(\ddot{\psi}, \dot{\psi}, \psi; \dot{q}, q)$$

$$✓ L(\ddot{\psi}, \dot{\psi}, \psi; \dot{q}^i, q^i)$$

Summary

- We derived the degeneracy condition for various types of Lagrangians to eliminate Ostrogradsky ghost.
- They allow us to construct healthy scalar-tensor theories, and proceed to detailed model-dependent analysis.
- It may be also possible to construct more general healthy theories e.g. with $\nabla\nabla\nabla\phi$.