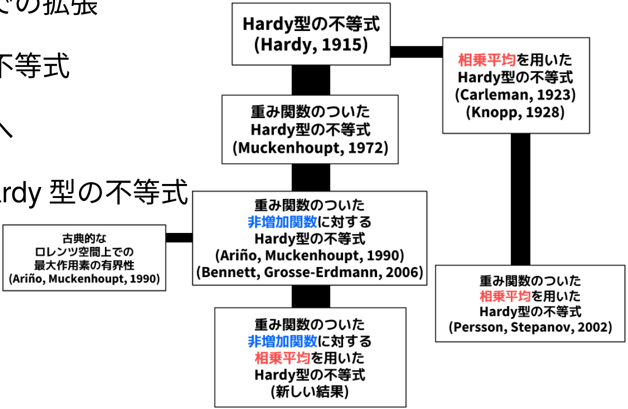
非増加関数に対する重み付き Hardy 型の不等式について

近藤恵夢

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科　自然科学専攻

2023 年 8 月 23 日　The World of Mathmatical Sciences

目次



Hardy型の不等式 (Hardy, 1915)
相乗平均を用いた Hardy型の不等式 (Carleman, 1923) (Knopp, 1928)
重み関数のついた Hardy型の不等式 (Muckenhoupt, 1972)
重み関数のついた 非増加関数に対する Hardy型の不等式 (Ariño, Muckenhoupt, 1990) (Bennett, Grosse-Erdmann, 2006)
古典的な ロレンツ空間上での 最大作用素の有界性 (Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた 相乗平均を用いた Hardy型の不等式 (Persson, Stepanov, 2002)
重み関数のついた 非増加関数に対する 相乗平均を用いた Hardy型の不等式 (新しい結果)

前置き・相加平均と相乗平均

正項数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの平均をとる場合, 一般的には

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{1.1}$$

と取ることが多い.
このように,「n 項まで足してから n で割る」平均の取り方を相加平均と呼ぶ.

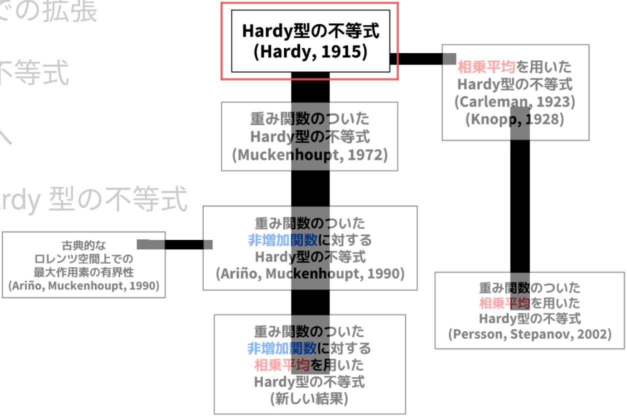
一方で, 以下のような平均の取り方を考えることもできる.

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}. \tag{1.2}$$

このように,「n 項までかけてから n 乗根をとる」平均の取り方を相乗平均と呼ぶ.

今回紹介する Hardy の不等式には, この「相加平均」と「相乗平均」が関わっている.

目次


Hardy型の不等式
(Hardy, 1915)
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(Carleman, 1923)
(Knopp, 1928)
重み関数のついた
Hardy型の不等式
(Muckenhoupt, 1972)
古典的な
ロレンツ空間上での
最大作用素の有界性
(Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた
非増加関数に対する
Hardy型の不等式
(Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(Persson, Stepanov, 2002)
重み関数のついた
非増加関数に対する
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(新しい結果)

Hardy の不等式とは

$1 < p < \infty$ とする. 任意の正項数列 $\{a_n\}$ に対して, 不等式

$$a_1^p + \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^p + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^p + \cdots \leqq C(a_1^p + a_2^p + a_3^p + \cdots) \tag{2.1}$$

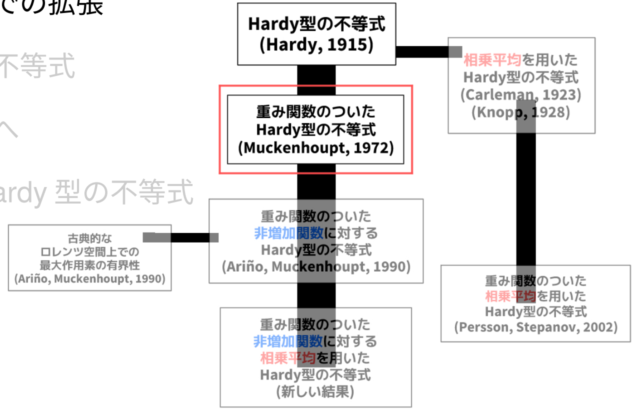
が成り立つ. ただし C は定数. これは相加平均に関する不等式である.

これを積分の形にすると以下のような形になる.
$1 < p < \infty$ とする. $[0, \infty)$ 上の任意の関数 f に対して, 不等式

$$\int_0^\infty \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right|^p dx \leqq C \int_0^\infty |f(x)|^p dx \tag{2.2}$$

が成り立つ. ただし C は定数. これを Hardy の不等式 (1915) という.
この式は登場以来いろいろな研究に応用されてきた. 今回はこの式の拡張を紹介する.

目次



Hardy型の不等式 (Hardy, 1915)
相乗平均を用いた Hardy型の不等式 (Carleman, 1923) (Knopp, 1928)
重み関数のついた Hardy型の不等式 (Muckenhoupt, 1972)
古典的な ロレンツ空間上での 最大作用素の有界性 (Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた 非増加関数に対する Hardy型の不等式 (Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた 相乗平均を用いた Hardy型の不等式 (Persson, Stepanov, 2002)
重み関数のついた 非増加関数に対する 相乗平均を用いた Hardy型の不等式 (新しい結果)

重み関数をつける形での拡張

（先ほどの Hardy の不等式）

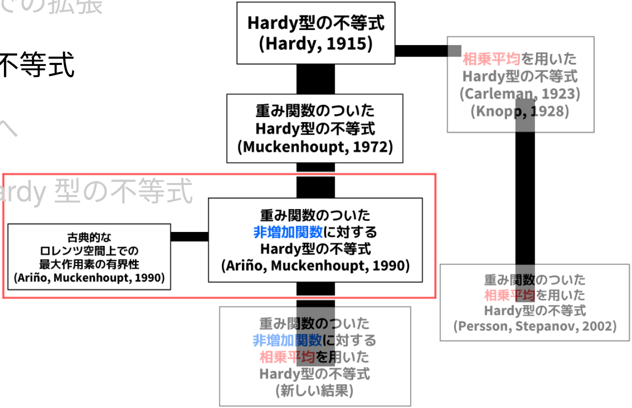
$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right|^p dx \leqq C \int_0^\infty |f(x)|^p dx \tag{2.2}$$

$1 \leqq p < \infty$ とし, V と W は $[0, \infty)$ 上の正関数とする.
1972 年に Muckenhoupt[5] は, $[0, \infty)$ 上の任意の関数 f に対して以下のような不等式が成り立つ必要十分条件を示した.

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right|^p V(x)dx \leqq C \int_0^\infty |f(x)|^p W(x)dx. \tag{3.1}$$

ただし C は定数. これは V と W を重み関数とした重み付き不等式である.

目次



Hardy型の不等式
(Hardy, 1915)
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(Carleman, 1923)
(Knopp, 1928)
重み関数のついた
Hardy型の不等式
(Muckenhoupt, 1972)
古典的な
ロレンツ空間上での
最大作用素の有界性
(Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた
非増加関数に対する
Hardy型の不等式
(Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(Persson, Stepanov, 2002)
重み関数のついた
非増加関数に対する
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(新しい結果)

非増加関数に対する不等式

（先ほどの不等式）

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right|^p V(x)dx \leqq C \int_0^\infty |f(x)|^p W(x)dx. \qquad (3.1)$$

1990 年に Ariño と Muckenhoupt[1] は, 先ほどの不等式の f を非増加関数に制限したときに不等式が成りたつための重み W に対する必要十分条件を示した.

すなわち, $1 \leqq p < \infty$ とし, W は $[0, \infty)$ 上の正関数とする. $[0, \infty)$ 上の任意の非増加関数 f に対して, 以下のような不等式が成り立つための重み W に対する必要十分条件を示した.

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right|^p W(x)dx \leqq C \int_0^\infty |f(x)|^p W(x)dx. \qquad (4.1)$$

ただし C は定数. なお, 先ほどと違い両辺の重みは同じものとしている.

（先ほどの不等式）

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right|^p W(x)dx \leqq C \int_0^\infty |f(x)|^p W(x)dx. \tag{4.1}$$

for all f on $[0, \infty)$: nonincreasing.

Q. なぜ f を非増加関数に制限した不等式を考えたのか？

A. Ariño と Muckenhoupt はもともと古典的なロレンツ空間内での最大作用素の有界性を調べており, この式はその有界性と同値な条件として登場した不等式である.
f を非増加なものに限定したのも, そのロレンツ空間の定義に関わっている.

Hardy型の不等式
(Hardy, 1915)

相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(Carleman, 1923)
(Knopp, 1928)

重み関数のついた
Hardy型の不等式
(Muckenhoupt, 1972)

古典的な
ロレンツ空間上での
最大作用素の有界性
(Ariño, Muckenhoupt, 1990)

重み関数のついた
非増加関数に対する
Hardy型の不等式
(Ariño, Muckenhoupt, 1990)

重み関数のついた
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(Persson, Stepanov, 2002)

重み関数のついた
非増加関数に対する
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(新しい結果)

（先ほどの不等式）

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right|^p W(x)dx \leqq C \int_0^\infty |f(x)|^p W(x)dx. \tag{4.1}$$

for all f on $[0, \infty)$: nonincreasing.

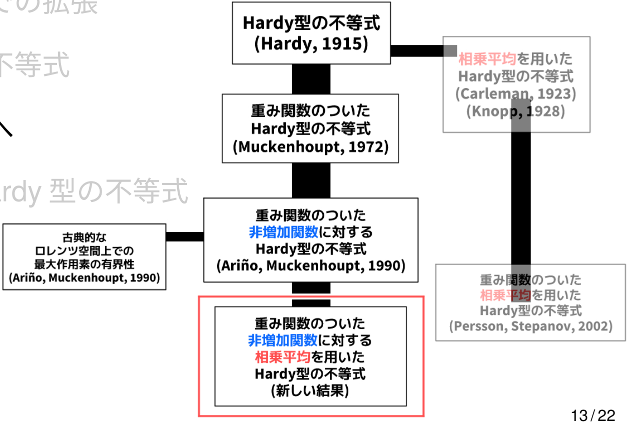
Theorem 4.1 (Ariño and Muckenhoupt, 1990)

$[0, \infty)$ 上の正関数 W に対し, 任意の非増加な関数 f に対して不等式 (4.1) が成り立つことと, すべての $r > 0$ に対し以下の不等式が成り立つことは同値である.

$$\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^p W(x)dx \leq B \int_0^r W(x)dx. \tag{4.2}$$

ただし B は定数.

目次



Hardy型の不等式 (Hardy, 1915)
重み関数のついた Hardy型の不等式 (Muckenhoupt, 1972)
重み関数のついた 非増加関数に対する Hardy型の不等式 (Ariño, Muckenhoupt, 1990)
古典的な ロレンツ空間上での 最大作用素の有界性 (Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた 非増加関数に対する 相乗平均を用いた Hardy型の不等式 (新しい結果)
相乗平均を用いた Hardy型の不等式 (Carleman, 1923) (Knopp, 1928)
重み関数のついた 相乗平均を用いた Hardy型の不等式 (Persson, Stepanov, 2002)

相加平均を相乗平均へ

（先ほどの不等式）

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right|^p W(x)dx \leqq C \int_0^\infty |f(x)|^p W(x)dx. \tag{4.1}$$

for all f on $[0, \infty)$: nonincreasing.

一方, 先ほどの式の左辺にある f の相加平均について, 以下のような事実がある.

$$\lim_{p\to\infty} \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)^{1/p} dt \right|^p = \exp\left\{ \frac{1}{x} \int_0^x \log f(t)dt \right\}$$

これは関数 f の相乗平均である. 式 (4.1) の f を $f^{1/p}$ に置き換えて形式的に $p \to \infty$ とすると, 以下のような式になる.

$$\int_0^\infty \exp\left\{ \frac{1}{x} \int_0^x \log f(t)dt \right\} W(x)dx \leqq C \int_0^\infty |f(x)|W(x)dx. \tag{5.1}$$

ただし C は定数. 私は森藤先生との共同研究で, 任意の非増加な関数 f に対してこの式が成り立つための重み W に対する必要十分条件が何かを示した.

（先ほどの不等式）

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)dt\right\} W(x)dx \leqq C\int_0^\infty |f(x)|W(x)dx. \tag{5.1}$$

for all f on $[0,\infty)$: nonincreasing.

Theorem 5.1

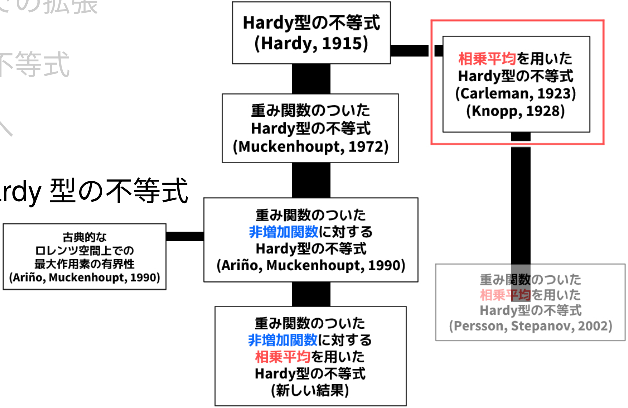
$[0,\infty)$ 上の正関数 W に対し, 任意の非増加な関数 f に対して不等式 (5.1) が成り立つことと, すべての $r > 0$ に対し不等式 (4.2) が成り立つような $p(1 \leqq p < \infty)$ が存在することは同値である.

$$\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^p W(x)dx \leq B\int_0^r W(x)dx. \tag{4.2}$$

ただし B は定数.

つまり, 式 (4.2) が成り立つような関数 W の集合を AM_p としたとき, $[0,\infty)$ 上の正関数 W に対し, 任意の非増加な関数 f に対して不等式 (5.1) が成り立つことと, 関数 W が $AM_\infty := \bigcup_{1\leq p<\infty} AM_p$ に属することが同値となる.

目次



Hardy型の不等式
(Hardy, 1915)
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(Carleman, 1923)
(Knopp, 1928)
重み関数のついた
Hardy型の不等式
(Muckenhoupt, 1972)
古典的な
ロレンツ空間上での
最大作用素の有界性
(Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた
非増加関数に対する
Hardy型の不等式
(Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(Persson, Stepanov, 2002)
重み関数のついた
非増加関数に対する
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(新しい結果)

相乗平均を用いた Hardy 型の不等式

- Carleman(1923) [3]
  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: 収束する正項級数

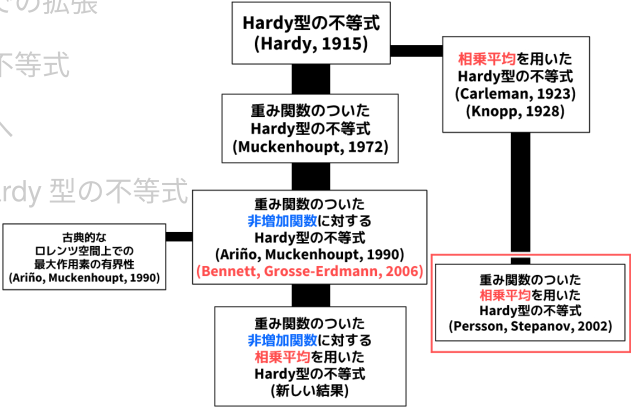
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- Knopp(1928) [4]

$$\int_0^{\infty} \left[\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^{x} \log f(t) dt \right) \right] dx < e \int_0^{\infty} f(x) dx,$$

for all f on $[0, \infty)$: positive.

目次



Hardy型の不等式 (Hardy, 1915)
相乗平均を用いたHardy型の不等式 (Carleman, 1923) (Knopp, 1928)
重み関数のついたHardy型の不等式 (Muckenhoupt, 1972)
重み関数のついた非増加関数に対するHardy型の不等式 (Ariño, Muckenhoupt, 1990) (Bennett, Grosse-Erdmann, 2006)
古典的なロレンツ空間上での最大作用素の有界性 (Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた相乗平均を用いたHardy型の不等式 (Persson, Stepanov, 2002)
重み関数のついた非増加関数に対する相乗平均を用いたHardy型の不等式 (新しい結果)

今後の課題

（先ほどの不等式）

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)dt\right\} W(x)dx \leqq C\int_0^\infty |f(x)|W(x)dx. \tag{5.1}$$

for all f on $[0,\infty)$: nonincreasing.

以下の不等式が成り立つような重み関数 V, W の必要十分条件は求められている．

- Persson and Stepanov(2002) [6]
  $0 < p, q < \infty,\ V, W > 0$

$$\int_0^\infty \left[\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)dt\right)\right]^p V(x)dx \leqq C\int_0^\infty f(x)^q W(x)dx,$$

for all f on $[0,\infty)$.

- Bennett and Grosse-Erdmann(2006) [2]
  $0 < p, q < \infty,\ V, W > 0$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p V(x)dx \leqq C\int_0^\infty f(x)^q W(x)dx,$$

for all f on $[0,\infty)$: nonincreasing.

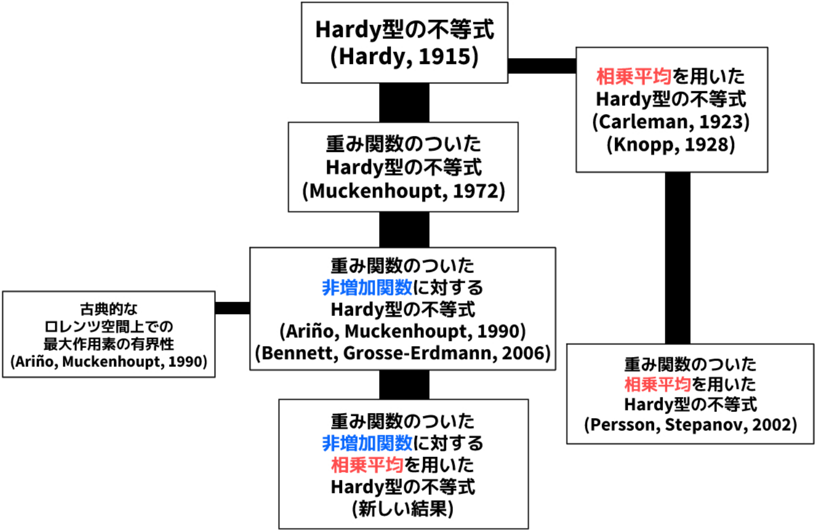
Question 1

$0 < p, q < \infty, V, W > 0$

$$\int_0^\infty \left[\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)dt\right)\right]^p V(x)dx \leqq C \int_0^\infty f(x)^q W(x)dx,$$

for all f on $[0, \infty)$: nonincreasing

が成り立つための V, W に対する必要十分条件は？ best constant は？
(今回は $p = q, V = W$ の場合を考えた)


Hardy型の不等式
(Hardy, 1915)
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(Carleman, 1923)
(Knopp, 1928)
重み関数のついた
Hardy型の不等式
(Muckenhoupt, 1972)
古典的な
ロレンツ空間上での
最大作用素の有界性
(Ariño, Muckenhoupt, 1990)
重み関数のついた
非増加関数に対する
Hardy型の不等式
(Ariño, Muckenhoupt, 1990)
(Bennett, Grosse-Erdmann, 2006)
重み関数のついた
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(Persson, Stepanov, 2002)
重み関数のついた
非増加関数に対する
相乗平均を用いた
Hardy型の不等式
(新しい結果)

参考文献

[1] M. Ariño and B. Muckenhoupt.
Maximal functions on classical lorentz spaces and hardy's inequality with weights for nonincreasing functions.
Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 320, pp. 727–735, 1990.

[2] G. Bennett and K.-G. Grosse-Erdmann.
Weighted hardy inequalities for decreasing sequences and functions.
Math. Ann., Vol. 334, pp. 489–531, 2006.

[3] T. Carleman.
Sur les fonctions quasi-analytiques.
Conférences faites au cinquième congrès des mathematiciens Scandinaves, Helsingfors, pp. 181–196, 1923.

[4] K. Knopp.
Über reihen mit positiven gliedern.
J. London Math. Soc., pp. 205–211, 1928.