

理論物理から 新しい数学をとりだすということ

立川裕二 (IPMU)

The World of Mathematical Sciences

2023 年 8 月 25 日

[[紫色のリンク](#)]はこの PDF ファイルをダウンロード
くださればクリック/タップで該当文献に飛びます。

僕は弦理論屋ということになっています。

僕は

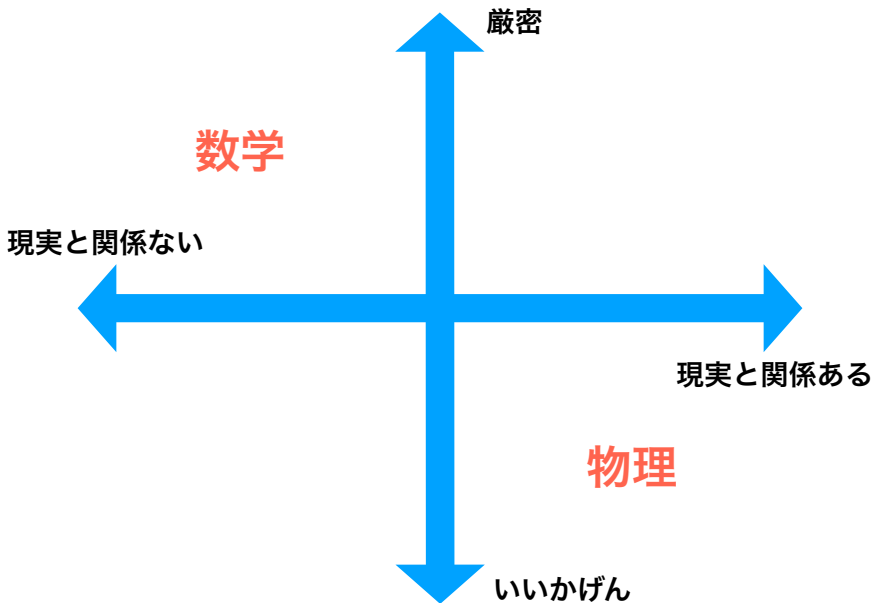
- 物理屋でしょうか、
- 数学者でしょうか、それとも
- 数理物理屋でしょうか？

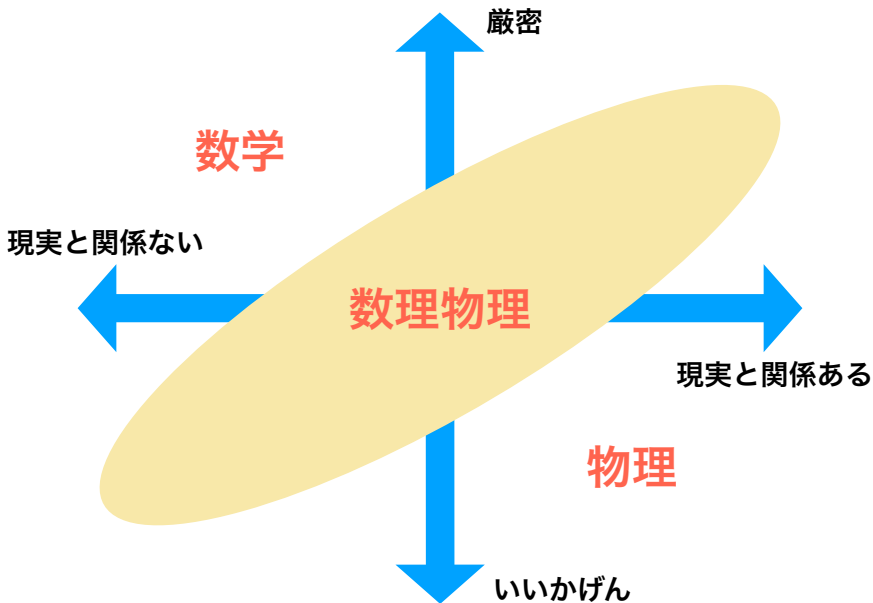
僕は今は主にパパをやっていますが...

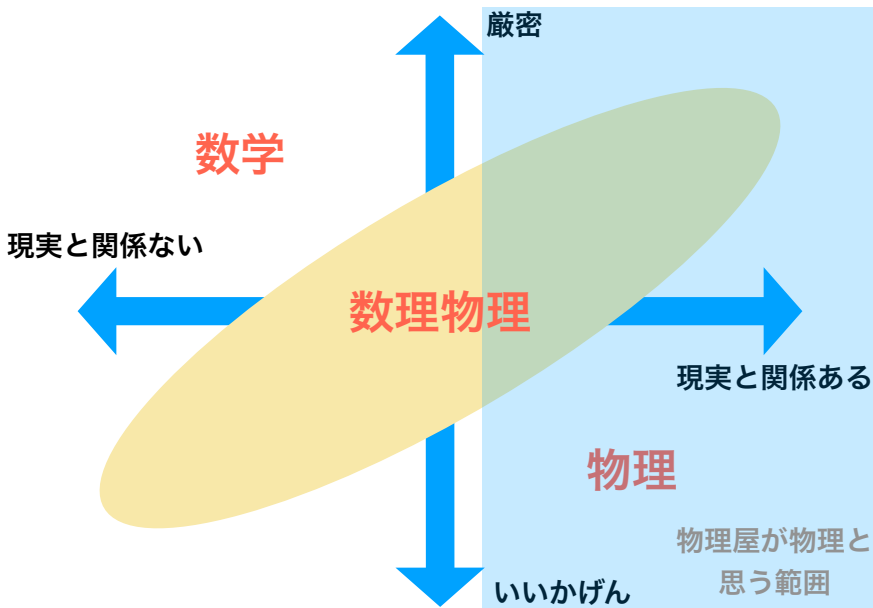
保育園に行ってる子どもの体が弱かったり、

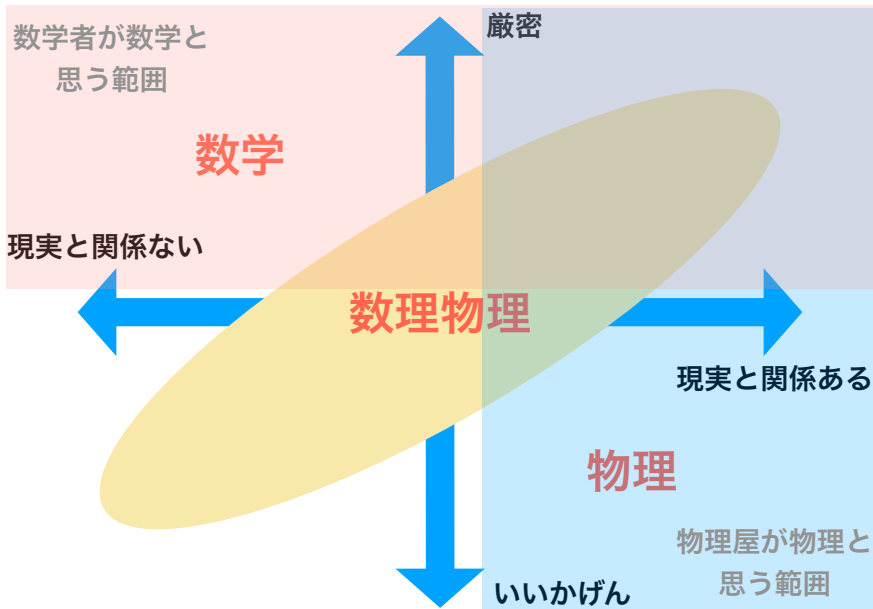
小学校に行ってる子どもが宿題をいやがったり、

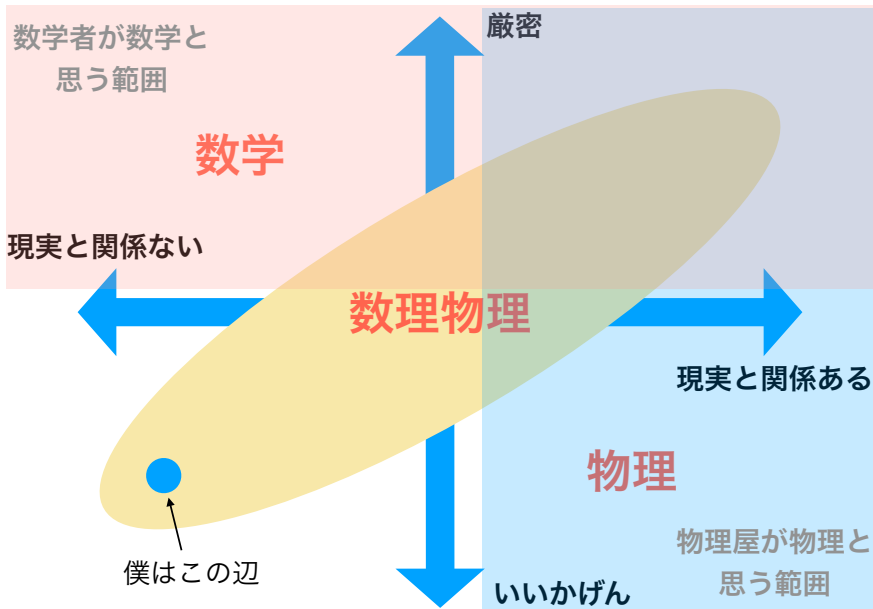
それはともかく。











厳密でもなく現実とも関係ないのに
やってて意味はあるんでしょうか？

あるときもあると僕はいいたい...

理論的に考察し新現象を示唆

理論物理

実験物理

実験で得られた新事実を提示

理論的に考察し新現象を示唆

僕のやるような研究

厳密数学

厳密証明で得られた新事実を提示

適当な論理で
いい加減なことを言う



理論物理

実際に実験して、
“現実”に触れる



実験物理

:

= 僕のやるような研究

:

厳密数学



適当な論理でもっと
いい加減なことを言う



実際に証明して、
“プラトンの現実”に触れる

こんな都合のいいことが本当に起きるのでしょうか？

時折は起きます。例えば...

昔々ある所に (1980 年代ということですが)
数学者が何人かおりました。

皆さん **quintic Calabi-Yau** という**六次元空間**の中の
二次元球面の数を数えておりました。

大きさ	数	数えた人	年
1	2875	J. Harris	[1979]
2	609250	S. Katz	[1986]

大変な計算でした。

何で数えたくなったんでしょうね、僕は知りません。

その頃、不思議な巡り合わせで、**超弦理論**が生まれました。

それはこの世は $9 + 1$ 次元だと申します。

でも我々には $3 + 1$ 次元しか見えませんから、
残りの $9 - 3 = 6$ 次元をどうにかしないとイケません。

これに **Calabi-Yau 空間**を使おうと思った物理屋がいました。

すると**その中の球面の数が物理的にも重要**に思えて参りました。

ちなみに quintic Calabi-Yau 空間の色々な二次元断面を表示するとこんな感じです。超弦理論に関する本や動画にはしばしば出てきます。

[A. J. Hanson, Notices of AMS, Nov. 1994, pp.1156–1163]

弦理論屋の P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green と L. Parkes は
1990 年初頭に厳密でないけれどとても簡単に
quintic Calabi-Yau の中の球面の数を数える方法を編み出しました。

思い出していただきますと、

大きさ	数	数えた人	年
$n_1 =$	2875	J. Harris	(1979)
$n_2 =$	609250	S. Katz	(1986)
$n_3 =$???		

ということでした。

弦理論屋の方法は、

- 微分方程式を書き下して、
- 解をテーラー展開で求めると、
- その展開係数が球面の数であるということです。

こういう計算は理論物理屋は得意です。

物理屋のいうには

$$n_3 = 317, 206, 375.$$

ということでした。となると数学者も計算せねばなりません。

G. Ellingsrud と S. A. Strømme は頑張りました。
すると 1990 年の 6 月になって、

$$n_3^{\text{数学}} = 2,682,549,425.$$

という答えになりました。

でも物理屋は

$$n_3^{\text{物理}} = 317,206,375$$

というわけで、答えが異なります。これは困った。

1991 年の 5 月には、数学者と物理屋とが
お互いの計算方法を学ぶ研究会がひらかれました。

うんとかしょ、どっこいしょ。答えはそれでも合いません。

1991年7月になって、Ellingsrud と Strømme はようやく計算の途中に間違いを見つけました。そうするとめでたく

$$n_3^{\text{物理}} = 317, 206, 375.$$

$$n_3^{\text{数学}} = 317, 206, 375.$$

となりました。

出版は[Ellingsrud-Strømme 1995]

めでたしめでたし、その後は物理屋と数学者は
末長く幸せに暮らしましたとさ。

これがミラー対称性という分野のはじまりです。

(以上の歴史的経緯は D. R. Morrison さんに教えてもらった
[P. Galison, *Mirror symmetry*, in “Growing Explanations,”
M. Norton Wise ed., Duke University Press, 2004]
という文献から採りました。)

このような感じの数学と物理の交流はほかにも幾例もあります。

僕も幸いそれに関わったことがありました。
それは**Mathieu moonshine**という話です。

残りの時間でこの**Mathieu moonshine**についてある程度詳細までご説明したいと思いますが、長い話になります。

というのは、

- 場の量子論とは何か、
- 弦理論とは何か、
- $K3$ 空間とは何か、
- マチウ群とは何か、
- ムーンシャイン現象とは何か、

説明しないとイケませんから。

頑張ってみます。

場の量子論とは?

- 場の量子的振舞いを記述するものです。
- ただし、場とは時間と空間に広がっているものなら何でも、例えば、電磁場、電子の場、格子の揺らぎの場, ...

最初の成功例は量子電磁力学で、

- 量子化された電磁場 = 光が電子などの粒子とどう相互作用するかを記述し、
- 1950 年ごろに枠組みが完成しました。
- それから地道な発展があります。

量子電磁力学では、理論計算と実験結果は非常に良く合います。

電子の異常磁気モーメントという量では:

$$a_e^{\text{実験}} = 0.01\ 159\ 652\ 181\dots$$

$$a_e^{\text{理論}} = 0.01\ 159\ 652\ 181\dots$$

というわけで、

- 場の量子論は深く研究され、
- その予言は高精度で計算でき、
- その結果は高精度で実験と合います。

しかし、満足できる定式化が知られていないという意味で
数学的に全然未完成です。

量子力学や一般相対論は数学者にとっても OK ですが、
場の量子論はそうではないわけです。

例えて言えばこういうことです。

古代エジプト人は、幾何学を数学的に定式化はしていなかったけれど、ピラミッドをつくりました。

現代の物理屋も、場の量子論を数学的に定式化は出来ていないけれど、計算出来て、実験と合います。

逆にだからこそ、そこから新しい数学も取り出せるのかもしれませんが。

つぎに弦理論について。

これは相対論的に動いている弦の量子論です。頑張ってみると、

- 9+1 次元のときのみ無矛盾で
- 自動的に量子化された重力を含む。

重力と量子力学を同時に矛盾無く扱うのは理論物理の大問題のひとつで、弦理論は有望な解決策のひとつ。

熱狂的に弦理論を信じている人もいますし、
熱狂的にアンチ弦理論の人もいます。

弦理論はこの世の中を記述しているのか？

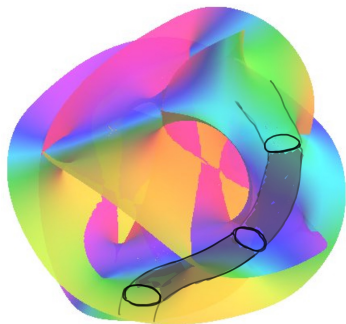
僕にはわかりません。

僕にとって大事なのは、
弦理論が (プラトンの意味で) 無矛盾かということ。

長らくの研究の結果、どうも無矛盾らしいです。

そうして、そこから色々と新しい数学が生まれてくる。

例えば Calabi-Yau 空間を動いている弦を調べたいとしましょう:



絵が下手ですいません。

これを弦の世界面上の $1+1$ 次元の場の量子論を使って調べるわけです。

Mathieu moonshine は **K3 空間** を動いている弦に関する話です。

K3 というのは**閉じた四次元空間**でそのリーマン曲率がノンゼロで

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

を満たすものです。

リーマン幾何を知らなくても結構です、
ある特定の意味で**半分平ら**な空間だと思ってくだされば良い。

特に、宇宙項がゼロのアインシュタイン方程式の解です。

K3 という名前は数学者の André Weil が三人の数学者 **Kähler**、**Kummer**、**Kodaira** (小平) を記念して、
また、ヒマラヤの **K2** 山にもちなんで名付けました:



<https://en.wikipedia.org/wiki/K2>

さて、Mathieu Moonshine の話は 1989 年の江口 = 大栗の仕事に
遡ります。(大栗さんはこの研究所の所長です!)

江口徹



僕の師匠

大栗博司



僕の兄弟子

大栗さんは指導教員の江口さんのもとで K3 内を動く弦について
共同研究者の Anne Taormina と共に調べていました。

その博士論文の主要結果はこれです:

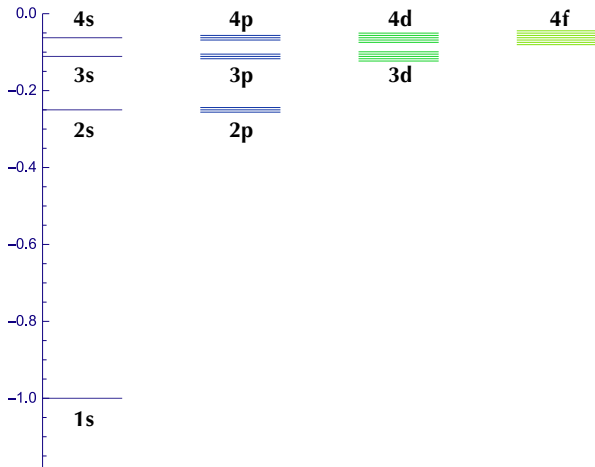
so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned} F(\tau) = & 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\ & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots \end{aligned} \tag{23}$$

K3 空間を動く弦の分配関数というものですが、
どういう意味があるのでしょうか。

それをより良く理解するために、量子力学における対称性について考えましょう。

水素原子のエネルギースペクトルは、
第 0 近似ではこのようになります:



状態に縮重がある。

伝統的に

名前	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	...
	sharp	principal	diffuse	fundamental	...
縮重度	1	3	5	7	...

と呼ばれます。

これらの縮重は対称性の現れです。

対称性は通常群を用いてあらわされます。

群 G とは $1 \in G$ であり、

$$\begin{aligned}G \ni g, h &\implies gh \in G \\G \ni g &\implies g^{-1} \in G\end{aligned}$$

で

$$g(hk) = (gh)k, \quad gg^{-1} = g^{-1}g = 1$$

などを満たすもの。

(二つ目の条件を緩めた非可逆対称性というのも最近うちの業界で流行っていますが、それはいつかまたの機会に...)

三次元の回転操作全体は $SO(3)$ と書かれる群をなす。

量子力学においては、対称性の群 G は行列として量子状態に作用します:

$$G \ni g \mapsto \rho(g) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

これを群の表現といい、行列のサイズを次元と言います。

原子のスペクトラムの伝統的な名前 s, p, d, f, \dots は、三次元の回転群 $SO(3)$ の 1 次元、3 次元、5 次元、7 次元 \dots 表現に対応している。

物理屋は $SO(3)$ の d 次元既約表現は $d = 2j + 1$ をみたす j を用いてスピン j だ、という。

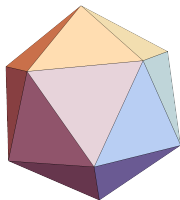
まとめると、回転対称性 = 回転群 $SO(3)$ の既約表現が

名前	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	...
	sharp	principal	diffuse	fundamental	...
スピン	0	1	2	3	...
縮重度 = 次元	1	3	5	7	...

で、それが水素原子のスペクトルに出てくるというわけです。

物理では回転群のような連続群だけでなく、有限群も現れます。

たとえば正二十面体



を保つ回転のなす群は交代群 A_5 というもので、60 個元がある。

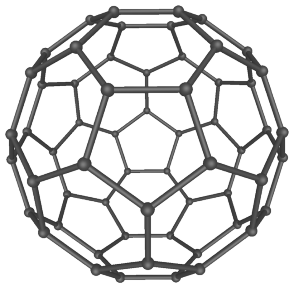
A_5 の既約表現は知られています:

名前	A	T_1	T_2	G	H
次元	1	3	3	4	5

(次元は同じだが本質的に異なる表現 T_1 、 T_2 があります)

こういう対称性をもつ物質の性質を調べている物理屋や化学者も
沢山いるようです。

フラーレン C_{60} の構造を Wikipedia から取ってきました:



<https://en.wikipedia.org/wiki/Fullerene>

このスペクトルはこんな感じです:

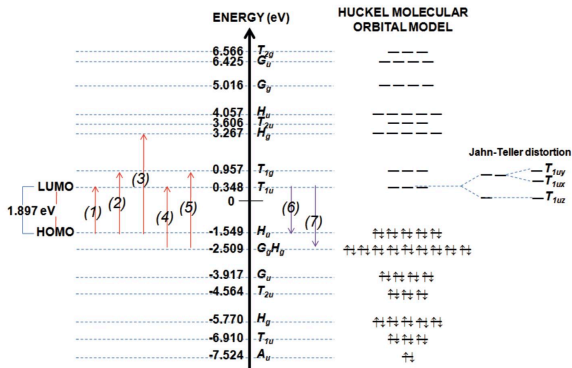


Figure 7: Schematic of the electronic structure of C_{60} as calculated by the Hückel model [80, 81] and its possible electronic excitation transitions experimentally observed in this study. The electronic excitation and emission transitions were numbered in the bracket as (1) to (5) and (6) to (7), respectively.

[T. E. Saraswati et al., *The Study of the Optical Properties of C60 Fullerene in Different Organic Solvents*, Open Chem. 17 (2019) 119–1212]

物理屋はこうやって個別の色々な群の対称性をもつ例を調べて喜んで
いるわけですが、数学者のアプローチは異なります。

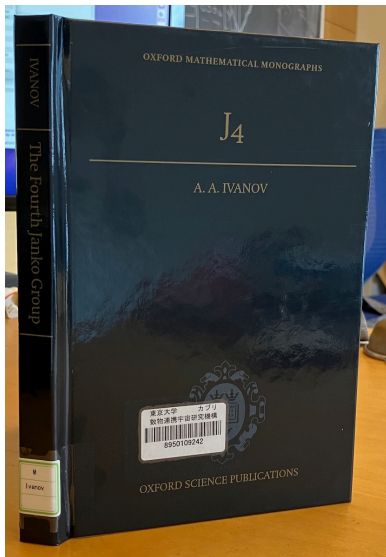
そもそもどんな対称性が、どんな群がありうるか、
それをまず全部調べてしまおう。

勝手な自然数が素数を積み上げて出来ているように、
勝手な有限群は有限単純群から出来ている。

そこで数学者は考えました: 有限単純群を完全に分類しよう!

有限単純群の分類

- 交代群 $A_{n \geq 5}$
無限に沢山ある。
- リー型の単純群 \simeq 連続群を有限体上で考えたもの
無限に沢山ある。
- 散在型の単純群 26 個
5 つのマチウ群, 4 つの ヤンコ群, ..., モンスター群
(マチウ群は 19 世紀後半、その他は 1965–1975 に発見)



OXFORD MATHEMATICAL MONOGRAPHS

J_4

A. A. IVANOV



OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS

IVANOV

The Fourth Janko Group

Ivanov

有限単純群の分類

この分類の証明は**数学の歴史の中でも一番長い**と評判。

1970年代の終わりから1980年代のはじめに証明がおおむね完成したと発表され、その時点で合計5000ページにおよぶ論文が出版されていた。

<https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1979-14551-8>

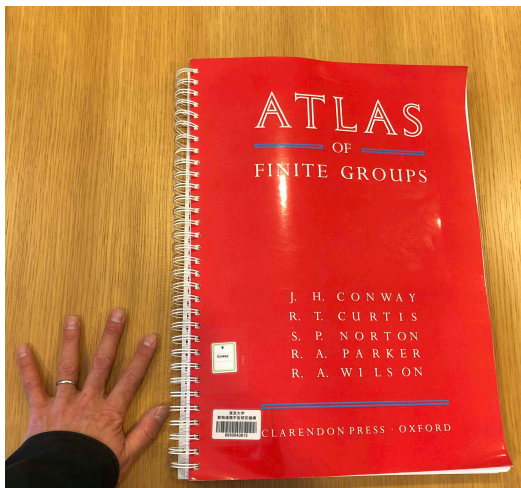
証明を後世に伝えるために書き直す計画がすぐにはじまり、何十年もつづいているが、まだ完成してません。数年前にも最新巻が出版されています。

すでに合計3500ページぐらいある。

<https://www.ams.org/publications/authors/books/postpub/surv-40>

<https://www.ams.org/journals/notices/201806/rnoti-p646.pdf>

有限群のデータをまとめた有名な本に **ATLAS** というのがあります:



これが最大のマチウ群 M_{24} についてのデータです:

M_{24}

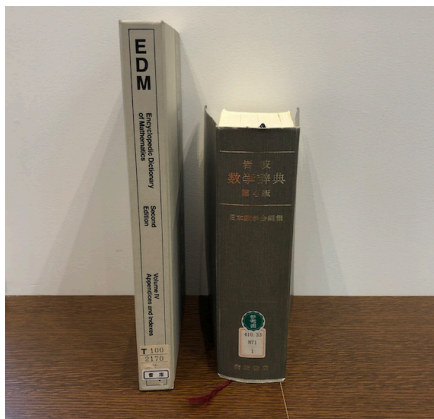
Mathieu group M_{24} (order 24482880)

Order	Structure	Character	Character	Character	Character
24482880	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
12241440	$2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
6120720	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
3060360	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
1530180	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
765090	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
382545	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
191272	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
95636	$2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
47818	$3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
23909	$3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
11954	$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
5977	$5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$				
2988	$7 \cdot 11 \cdot 13$				
1494	$11 \cdot 13$				
747	13				
1	1				

Character table (partial):

Order	1	2A	2B	3A	3B	4A	4B	6A	6B	8A	8B	12A	12B	12C	12D	12E	12F	12G	12H	12I	12J	12K	12L	12M	12N	12O	12P	12Q	12R	12S	12T	12U	12V	12W	12X	12Y	12Z	12AA	12AB	12AC	12AD	12AE	12AF	12AG	12AH	12AI	12AJ	12AK	12AL	12AM	12AN	12AO	12AP	12AQ	12AR	12AS	12AT	12AU	12AV	12AW	12AX	12AY	12AZ	12BA	12BB	12BC	12BD	12BE	12BF	12BG	12BH	12BI	12BJ	12BK	12BL	12BM	12BN	12BO	12BP	12BQ	12BR	12BS	12BT	12BU	12BV	12BW	12BX	12BY	12BZ	12CA	12CB	12CC	12CD	12CE	12CF	12CG	12CH	12CI	12CJ	12CK	12CL	12CM	12CN	12CO	12CP	12CQ	12CR	12CS	12CT	12CU	12CV	12CW	12CX	12CY	12CZ	12DA	12DB	12DC	12DD	12DE	12DF	12DG	12DH	12DI	12DJ	12DK	12DL	12DM	12DN	12DO	12DP	12DQ	12DR	12DS	12DT	12DU	12DV	12DW	12DX	12DY	12DZ	12EA	12EB	12EC	12ED	12EE	12EF	12EG	12EH	12EI	12EJ	12EK	12EL	12EM	12EN	12EO	12EP	12EQ	12ER	12ES	12ET	12EU	12EV	12EW	12EX	12EY	12EZ	12FA	12FB	12FC	12FD	12FE	12FF	12FG	12FH	12FI	12FJ	12FK	12FL	12FM	12FN	12FO	12FP	12FQ	12FR	12FS	12FT	12FU	12FV	12FW	12FX	12FY	12FZ	12GA	12GB	12GC	12GD	12GE	12GF	12GG	12GH	12GI	12GJ	12GK	12GL	12GM	12GN	12GO	12GP	12GQ	12GR	12GS	12GT	12GU	12GV	12GW	12GX	12GY	12GZ	12HA	12HB	12HC	12HD	12HE	12HF	12HG	12HH	12HI	12HJ	12HK	12HL	12HM	12HN	12HO	12HP	12HQ	12HR	12HS	12HT	12HU	12HV	12HW	12HX	12HY	12HZ	12IA	12IB	12IC	12ID	12IE	12IF	12IG	12IH	12II	12IJ	12IK	12IL	12IM	12IN	12IO	12IP	12IQ	12IR	12IS	12IT	12IU	12IV	12IW	12IX	12IY	12IZ	12JA	12JB	12JC	12JD	12JE	12JF	12JG	12JH	12JI	12JJ	12JK	12JL	12JM	12JN	12JO	12JP	12JQ	12JR	12JS	12JT	12JU	12JV	12JW	12JX	12JY	12JZ	12KA	12KB	12KC	12KD	12KE	12KF	12KG	12KH	12KI	12KJ	12KL	12KM	12KN	12KO	12KP	12KQ	12KR	12KS	12KT	12KU	12KV	12KW	12KX	12KY	12KZ	12LA	12LB	12LC	12LD	12LE	12LF	12LG	12LH	12LI	12LJ	12LK	12LL	12LM	12LN	12LO	12LP	12LQ	12LR	12LS	12LT	12LU	12LV	12LW	12LX	12LY	12LZ	12MA	12MB	12MC	12MD	12ME	12MF	12MG	12MH	12MI	12MJ	12MK	12ML	12MN	12MO	12MP	12MQ	12MR	12MS	12MT	12MU	12MV	12MW	12MX	12MY	12MZ	12NA	12NB	12NC	12ND	12NE	12NF	12NG	12NH	12NI	12NJ	12NK	12NL	12NM	12NN	12NO	12NP	12NQ	12NR	12NS	12NT	12NU	12NV	12NW	12NX	12NY	12NZ	12OA	12OB	12OC	12OD	12OE	12OF	12OG	12OH	12OI	12OJ	12OK	12OL	12OM	12ON	12OO	12OP	12OQ	12OR	12OS	12OT	12OU	12OV	12OW	12OX	12OY	12OZ	12PA	12PB	12PC	12PD	12PE	12PF	12PG	12PH	12PI	12PJ	12PK	12PL	12PM	12PN	12PO	12PP	12PQ	12PR	12PS	12PT	12PU	12PV	12PW	12PX	12PY	12PZ	12QA	12QB	12QC	12QD	12QE	12QF	12QG	12QH	12QI	12QJ	12QK	12QL	12QM	12QN	12QO	12QP	12QQ	12QR	12QS	12QT	12QU	12QV	12QW	12QX	12QY	12QZ	12RA	12RB	12RC	12RD	12RE	12RF	12RG	12RH	12RI	12RJ	12RK	12RL	12RM	12RN	12RO	12RP	12RQ	12RR	12RS	12RT	12RU	12RV	12RW	12RX	12RY	12RZ	12SA	12SB	12SC	12SD	12SE	12SF	12SG	12SH	12SI	12SJ	12SK	12SL	12SM	12SN	12SO	12SP	12SQ	12SR	12SS	12ST	12SU	12SV	12SW	12SX	12SY	12SZ	12TA	12TB	12TC	12TD	12TE	12TF	12TG	12TH	12TI	12TJ	12TK	12TL	12TM	12TN	12TO	12TP	12TQ	12TR	12TS	12TT	12TU	12TV	12TW	12TX	12TY	12TZ	12UA	12UB	12UC	12UD	12UE	12UF	12UG	12UH	12UI	12UJ	12UK	12UL	12UM	12UN	12UO	12UP	12UQ	12UR	12US	12UT	12UU	12UV	12UW	12UX	12UY	12UZ	12VA	12VB	12VC	12VD	12VE	12VF	12VG	12VH	12VI	12VJ	12VK	12VL	12VM	12VN	12VO	12VP	12VQ	12VR	12VS	12VT	12VU	12VV	12VW	12VX	12VY	12VZ	12WA	12WB	12WC	12WD	12WE	12WF	12WG	12WH	12WI	12WJ	12WK	12WL	12WM	12WN	12WO	12WP	12WQ	12WR	12WS	12WT	12WU	12WV	12WW	12WX	12WY	12WZ	12XA	12XB	12XC	12XD	12XE	12XF	12XG	12XH	12XI	12XJ	12XK	12XL	12XM	12XN	12XO	12XP	12XQ	12XR	12XS	12XT	12XU	12XV	12XW	12XX	12XY	12XZ	12YA	12YB	12YC	12YD	12YE	12YF	12YG	12YH	12YI	12YJ	12YK	12YL	12YM	12YN	12YO	12YP	12YQ	12YR	12YS	12YT	12YU	12YV	12YW	12YX	12YY	12YZ	12ZA	12ZB	12ZC	12ZD	12ZE	12ZF	12ZG	12ZH	12ZI	12ZJ	12ZK	12ZL	12ZM	12ZN	12ZO	12ZP	12ZQ	12ZR	12ZS	12ZT	12ZU	12ZV	12ZW	12ZX	12ZY	12ZZ
-------	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

ATLAS ほど網羅的でないですが、岩波数学辞典もなかなか有用です:



巻末に著名な有限群のデータがいくつか乗っています。

PDF 版が CD-ROM に入って付いてくるのも有り難いです。

マチウ群には五種類あります:

$$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}.$$

フランスの数学者 Mathieu によって 1861 から 1873 の間に発見されました。

最大の M_{24} は **244823040** 個の元を持ち、**拡大バイナリ Golay コード**というコードの対称性です。

コードとは何でしょう?

コンピュータでは 0,1 のビットの並びを扱います。
たとえばこんな感じ:

010110111

これを遠距離通信するのは大変です。通信途中の雑音で
0 と 1 がひっくり返ってしまっは情報が伝わりません。

そこで、たとえば 0 のかわりに 0000、1 のかわりに 1111 を送ることを考えます。

すると、多少雑音があっても 0100 が届いても、0000 を届ける
つもりだったのだな、とわかります。

これが**コード (code)**です。

拡大バイナリ Golay コードは Golay が 1949 年に導入したコードで、もとの 12 ビットの情報を送信の際に 24 ビットに埋め込みます。情報理論をシャノンが提唱した 1948 年のたった一年後でした:

Notes on Digital Coding*

The consideration of message coding as a means for approaching the theoretical capacity of a communication channel, while reducing the probability of errors, has suggested an interesting number theoretical problem of devising lossless binary (or other) coding schemes serving to insure the reception of a correct, but reduced, message when an upper limit to the number of transmission errors is postulated.

An example of lossless binary coding is given by Shannon¹ who considers the case of blocks of seven symbols, one or more of which can be in error. The solution of this can be extended to blocks of 2^p-1 binary symbols, and, more generally, when coding schemes based on the prime number p are applied, to blocks of $p^p-1/p-1$ symbols which are transmitted, and received with complete equivocation of one or no symbol, each block comprising a redundant symbol designed to remove the equivocation. When sending the message, the m redundant symbols x_m are determined in terms of the message symbols Y_n from the congruent relations

$$x_m = x_n + \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{nk} Y_k \equiv 0 \pmod{p}.$$

In the decoding process, the Y_n 's are recalculated with the received symbols, and their suitable focus a number on the base p which determines unambiguously the mistransmitted symbol and its correction.

In passing from m to $m+1$, the matrix with m rows and $p^m-1/p-1$ columns formed

* Received by the Institution, February 23, 1949.
 1. C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," Bell Syst. Tech. Jour., vol. 27, p. 418; Feb. 1948.

with the coefficients of the X 's and Y 's in the expressions above is repeated p times horizontally, while an $(m+1)$ st row added, consisting of $p^m-1/p-1$ zeros, followed by as many one's etc. up to $p-1$, an added column of m zeros with a one for the lowest term completes the new matrix for $m+1$.

If we except the trivial case of blocks of 2^5+1 binary symbols, of which any group comprising up to 5 symbols can be received in error which equal probability, it does not appear that a search for lossless coding schemes, in which the number of errors is limited but larger than one, can be systematized so as to yield a family of solutions. A necessary but not sufficient condition for the existence of such a lossless coding scheme in the binary system is the existence of three or more first numbers of a line of Pascal's triangle which add up to an exact power of 2. A limited search has revealed two such cases; namely, that of the first three numbers of the 90th line, which add up to 2^{20} and that of the first four numbers of the 23rd line, which add up to 2^6 . The first case does not correspond to a lossless coding scheme, for, were such a scheme to exist, we could designate by r the number of E_n ensembles corresponding to one error and having an odd number of 1's and by q the number of E_n ensembles corresponding to two transmission errors could be formed by re-estimating term by term all the combinations of one even and one odd ensemble corresponding each to one error, and would number $r(2q-r)$. We should have $r+r(2q-r) = 2^m$, which is impossible for integral values of r .

On the other side, the second case can be coded so as to yield 12 sure symbols, and the 2^{20} matrix of this case is given in Table I. A second matrix is also given, which is that of the only other lossless coding scheme encountered (in addition to the general class mentioned above) in which blocks of eleven ternary symbols are transmitted with no more than 2 errors, and out of which six sure symbols can be obtained.

It must be mentioned that the use of the ternary coding scheme just mentioned will always result in a power loss, whereas the coding scheme for 23 binary symbols and a maximum of three transmission errors yields a power saving of 13 db for vanishing probabilities of errors. The saving realized with the coding scheme for blocks of 2^m-1 binary symbols approaches 3 db for increasing m 's and decreasing probabilities of error, but a loss is always encountered when $m=3$.

MARCEL J. E. GOLAY
 Signal Corps Engineering Laboratories
 Fort Monmouth, N. J.

TABLE I

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	E_{16}	E_{17}	E_{18}	E_{19}	E_{20}
X_1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X_2	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X_3	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
X_5	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_6	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_7	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_8	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_9	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{10}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{11}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{12}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{13}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{14}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{15}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{16}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{17}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{18}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{19}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
X_{20}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Reprinted from Proc. IRE, vol. 37, p. 657, June 1949.

https://en.wikipedia.org/wiki/Marcel_J._E._Golay

1967 年になって、拡大バイナリ Golay コードの対称性が最大マチウ群 M_{24} であることに Leech が気づきました。

<https://doi.org/10.4153/CJM-1967-017-0>

また、拡大バイナリ Golay コードは実社会で使われています。有名なのは人類がはじめて外惑星に人工衛星を送った NASA のボイジャー計画で、木星からのデータの転送の一部にはこのコードが使われました。

これは NASA のウェブサイトで公開されている、1979 年 3 月にボイジャーから地球に送られてきた木星の画像です。

<https://voyager.jpl.nasa.gov/mission/science/jupiter/>

ただし、画像の転送には多少エラーが混じってもよいとのことで Golay コードは使われず、もっと科学的に重要な温度等のデータのために Golay コードは使われたそうです。

<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19830002051/downloads/19830002051.pdf>

だから、最大 Mathieu 群 M_{24} は
拡大バイナリ Golay コードの対称性なわけです。

さて、**Mathieu moonshine** の話をするまえに、
その元となる **Monstrous moonshine** の話をしないとけません。

モジュラー J 関数

$$J(q) = \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \dots$$

は、19 世紀から知られている古典的な複素関数です。

1978 年に McKay は次のことに気が付きました:

当時みつきりそうだった新散在型有限群 **モンスター** は元の数 $\sim 8 \cdot 10^{53}$ あるが、その一番小さい非自明既約表現は **196883** 次元である。

その次の既約表現の次元は **21296876** だが、

$$21493760 = 1 + 196883 + 21296876。$$

[Thompson 1979]

何か関係があるのではないか?

J 関数: 保形関数
モンスター群: 有限群

関連する観察もいろいろなされた

[Ogg 1978, Conway-Norton 1979, ...]

あまりに突拍子もなかったので、

Monstrous Moonshine (とんでもなく馬鹿げた話) と言われた。

90 年代初頭には

[Frenkel-Lepowsky-Meurman 1988], [Borcherds, 1992]

によって解決。

頂点作用素代数の理論が深く使われた。

ある特別な 24 次元トーラスを動く弦理論のスペクトルが J 関数であることが関係する。

1989 年、僕の兄弟子の大栗さん (現 IPMU 所長) は博士論文で
K3 曲面を動く弦理論のスペクトルを計算した:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned} F(\tau) = & 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\ & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots \end{aligned} \tag{23}$$

これは

- 第一励起状態は **90** だけの縮重があり、
- 第二励起状態は **462** だけの縮重があり、
- 第三励起状態は **1540** だけの縮重があり ...というわけです。

当時、**K3 曲面**と**マチウ群**をつなぐ**数学の論文**もありました:

Invent. math. 94, 183–221 (1988)

*Inventiones
mathematicae*
© Springer-Verlag 1988

**Finite groups of automorphisms of K3 surfaces
and the Mathieu group**

Dedicated to Professor Masayoshi Nagata on his 60th Birthday

Shigeru Mukai

Department of Mathematics, Nagoya University, Furō-chō Chikusa-ku, Nagoya 464 Japan

でも最大マチウ群は出てこない。

そのころ江口さん曰く:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned} F(\tau) = & 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\ & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots \end{aligned} \tag{23}$$

この係数は最大マチウ群と関係あるのでは?

そして 20 年の時は流れ...

2009 年、アスペン。



江口さん、大栗さん、僕と三人研究会にいたので、もう一度考えてみた。

僕: 岩波数学辞典の後ろの数表をみてみれば?

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned}
 F(\tau) = & 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\
 & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	1 23 7·36 23·11 23·77 55·64 $\overline{45}$ $\overline{22\cdot45}$ $\overline{23\cdot45}$ $\overline{23\cdot45}$ $\overline{11\cdot21}$ $\overline{770}$
	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	23·21 23·55 23·88 23·99 23·144 23·11·21 23·7·36 77·72 11·35·27

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned}
 F(\tau) = & \boxed{90}q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\
 & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	1 23 7·36 23·11 23·77 55·64	$\boxed{45}$	$\overline{22 \cdot 45}$ $\overline{23 \cdot 45}$ $\overline{23 \cdot 45}$ $\overline{11 \cdot 21}$ $\overline{770}$
	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	23·21 23·55 23·88 23·99 23·144		23·11·21 23·7·36 77·72 11·35·27

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned}
 F(\tau) = & \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\
 & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	1 23 7·36 23·11 23·77 55·64	$\boxed{45}$	$\overline{22 \cdot 45}$ $\overline{23 \cdot 45}$ $\overline{23 \cdot 45}$	$\boxed{11 \cdot 21}$	$\overline{770}$
	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	23·21 23·55 23·88 23·99 23·144		23·11·21 23·7·36 77·72 11·35·27		

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned}
 F(\tau) = & \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\
 & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	1 23 7·36 23·11 23·77 55·64	$\boxed{45}$	$\overline{22 \cdot 45}$ $\overline{23 \cdot 45}$ $23 \cdot 45$	$\boxed{11 \cdot 21}$	$\boxed{770}$
	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	23·21 23·55 23·88 23·99 23·144		23·11·21 23·7·36 77·72 11·35·27		

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned}
 F(\tau) = & \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + \boxed{4554}q^4 + 11592q^5 \\
 & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	1 23 7·36 23·11 23·77 55·64	$\boxed{45}$	22·45 23·45 23·45	$\boxed{11 \cdot 21}$	$\boxed{770}$
	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	23·21 23·55 23·88	$\boxed{23 \cdot 99}$	23·144 23·11·21 23·7·36	77·72 11·35·27	

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + \boxed{4554}q^4 + 11592q^5 \\ + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots \quad (23)$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	1	23	7·36	23·11	23·77	55·64	$\boxed{45}$	22·45	23·45	23·45	$\boxed{11 \cdot 21}$	$\boxed{770}$
	$(1)^{24}$	g	23·21	23·55	23·88	$\boxed{23 \cdot 99}$	23·144	23·11·21	23·7·36	77·72	11·35·27			

対応がある！

一年間考えても何もわからなかったので、
「対応がある」とだけ書いた論文を書いた。

Notes on the K3 Surface and the Mathieu Group M_{24}

Tohru Eguchi, Hiroshi Ooguri, and Yuji Tachikawa

Experimental Mathematics, 20(1):91–96, 2011

Copyright © Taylor & Francis Group, LLC

ISSN: 1058-6458 print

DOI: 10.1080/10586458.2011.544585

<https://arxiv.org/abs/1004.0956>

数学者も興味を持ってくださっているようです:

arXiv.org > math > arXiv:1211.5531

Search on

Mathematics > Representation Theory

Much ado about Mathieu

Terry Gannon

(Submitted on 23 Nov 2012 (v1), last revised 15 Mar 2013 (this version, v2))

Eguchi, Ooguri and Tachikawa have observed that the elliptic genus of type II string theory on K3 surfaces appears to possess a Moonshine for the largest Mathieu group. Subsequent work by several people established a candidate for the elliptic genus twisted by each element of M_{24} . In this paper we prove that the resulting sequence of class functions are true characters of M_{24} , proving the Eguchi–Ooguri–Tachikawa conjecture. We prove the evenness property of the multiplicities, as conjectured by several authors. We also identify the role group cohomology plays in both K3–Mathieu Moonshine and Monstrous Moonshine; in particular this gives a cohomological interpretation for the non–Fricke elements in Norton’s Generalised Monstrous Moonshine conjecture. We investigate the intriguing proposal of Gaberdiel–Hohenegger–Volpato that K3–Mathieu Moonshine lifts to the Conway group Co_1 .

こんな数学の論文もあります:

arXiv.org > math > arXiv:2006.02922

Search...

Help | Advanced

Mathematics > Algebraic Topology

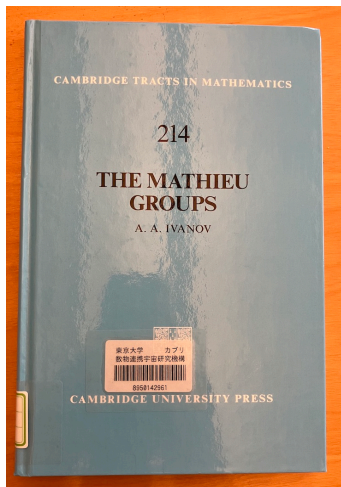
[Submitted on 4 Jun 2020]

Topological Mathieu Moonshine

Theo Johnson-Freyd

We explore the Atiyah–Hirzebruch spectral sequence for the $tmf^*[\frac{1}{2}]$ -cohomology of the classifying space BM_{24} of the largest Mathieu group M_{24} , twisted by a class $\omega \in H^4(BM_{24}; Z[\frac{1}{2}]) \cong Z_3$. Our exploration includes detailed computations of the Z_3 -cohomology of M_{24} and of the first few differentials in the AHSS. We are specifically interested in the value of $tmf_{\omega}^*(BM_{24})[\frac{1}{2}]$ in cohomological degree -27 . Our main computational result is that $tmf_{\omega}^{-27}(BM_{24})[\frac{1}{2}] = 0$ when $\omega \neq 0$. For comparison, the restriction map $tmf_{\omega}^{-3}(BM_{24})[\frac{1}{2}] \rightarrow tmf^{-3}(pt)[\frac{1}{2}] \cong Z_3$ is nonzero for one of the two nonzero values of ω . Our motivation comes from Mathieu Moonshine. Assuming a well-studied conjectural relationship between TMF and supersymmetric quantum field theory, there is a canonically-defined Co_1 -twisted-equivariant lifting $[\tilde{V}^{24}]$ of the class $\{24\Delta\} \in TMF^{-24}(pt)$, where Co_1 denotes Conway's largest sporadic group. We conjecture that the product $[\tilde{V}^{\ell/2}]_{\nu}$, where $\nu \in TMF^{-3}(pt)$ is the image of the generator of $tmf^{-3}(pt) \cong Z_{24}$, does not vanish Co_1 -equivariantly, but that its restriction to M_{24} -twisted-equivariant TMF does vanish. This conjecture answers some of the questions in Mathieu Moonshine: it implies the existence of a minimally supersymmetric quantum field theory with M_{24} symmetry, whose twisted-and-twined partition functions have the same mock modularity as in Mathieu Moonshine. Our AHSS calculation establishes this conjecture "perturbatively" at odd primes. An appendix included mostly for entertainment purposes discusses " ℓ -complexes" and their relation to $SU(2)$ Verlinde rings. The case $\ell = 3$ is used in our AHSS calculations.

先ほど紹介した Ivanov さんの Mathieu 群に関する本には



こういうコメントもあります:

9.3 Mathieu Moonshine

A new epoch in the history of the Mathieu group M_{24} started when T. Eguchi, H. Ooguri and Y. Tachikawa⁸ observed that the dimensions of some representations of M_{24} (the smallest being the 90-dimensional sum of two algebraically conjugate 45-representations constructed in Chapter 6) are multiplicities of superconformal algebra characters in the $K3$ elliptic genus. The new area which goes under the name of *Mathieu moonshine* is still pretty much in the making. The original Eguchi–Ooguri–Tachikawa conjecture has recently been proved by T. Gannon.⁹ On the way to this proof many more observations for which there are as yet no conceptual explanations were made. The best we can do here is to encourage the reader to follow the ongoing research on this fascinating topic (as the author does), hoping to join the game when the time comes.

適当な論理で
いい加減なことを言う



理論物理

実際に実験して、
“現実”に触れる



実験物理

:

= 僕のやるような研究

:

厳密数学



適当な論理でもっと
いい加減なことを言う



実際に証明して、
“プラトンの現実”に触れる