格子を用いて見える関数の性質
- Schur 関数とゼータ関数への利用-

中筋麻貴 (上智大学/東北大学)
Maki Nakasuji (Sophia University / Tohoku University)

2023 年 8 月 25 日
The world of Mathematical Sciences at IPMU

Introduction

中筋麻貴　上智大学理工学部情報理工学科・教授
東北大学大学院理学研究科・教授（クロスアポイントメント）

研究分野：解析数論, 表現論

ゼータ/Schur 多重ゼータ関数，Iwahori-Whittaker 関数

[Women In Number theory Japan]

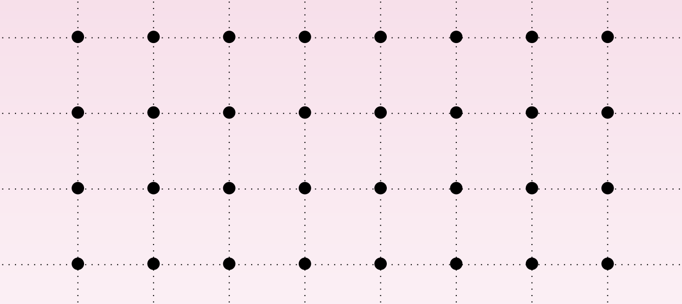
1. ゼータ/Schur 多重ゼータ関数：

リーマンゼータ関数を Schur 関数の構造を取り入れて組合せ論的に多変数化した Schur 多重ゼータ関数の性質の研究．数論，組合せ論，表現論など，色々な方向からのアプローチで研究に取り組んでいます．

2. Iwahori-Whittaker 関数：

p 進群上の Iwahori 部分群における作用で不変な主系列表現の性質についての研究．特に，絡作用素によって決まる基底に興味があります．

Lattice and Functions



Schur 多項式，リーマンゼータ関数

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $s \in \mathbb{C}$ に対し，

$$s_\lambda = s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\det(x_j^{n-i+\lambda_i})}{\det(x_j^{n-i})}, \quad \zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

Schur polynomial

Schur 多項式

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ s.t. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq 0$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots)$ に対し,

$$s_\lambda = s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\det(x_j^{n-i+\lambda_i})}{\det(x_j^{n-i})},$$

例. $\lambda = (2,1)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ のとき. $(n = 3)$

$$s_\lambda = s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\det(x_j^{3-i+\lambda_i})}{\det(x_j^{3-i})}$$

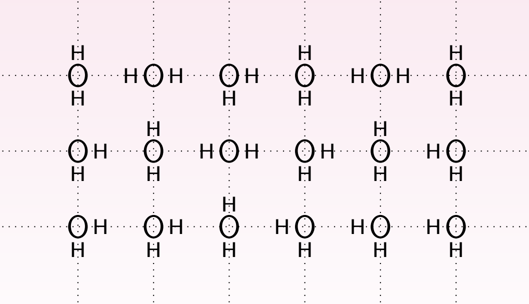
$$分子 = \begin{vmatrix} x_1^{3-1+\lambda_1} & x_2^{3-1+\lambda_1} & x_3^{3-1+\lambda_1} \\ x_1^{3-2+\lambda_2} & x_2^{3-2+\lambda_2} & x_3^{3-2+\lambda_2} \\ x_1^{3-3+\lambda_3} & x_2^{3-3+\lambda_3} & x_3^{3-3+\lambda_3} \end{vmatrix}, \quad 分母 = \begin{vmatrix} x_1^{3-1} & x_2^{3-1} & x_3^{3-1} \\ x_1^{3-2} & x_2^{3-2} & x_3^{3-2} \\ x_1^{3-3} & x_2^{3-3} & x_3^{3-3} \end{vmatrix}$$

$$s_\lambda = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2^2 x_3 + 2 x_1 x_2 x_3$$

2-dimensional Crystal lattice

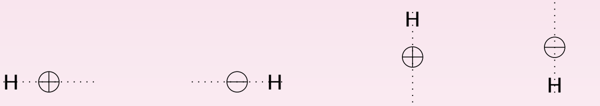
2 次元結晶格子.

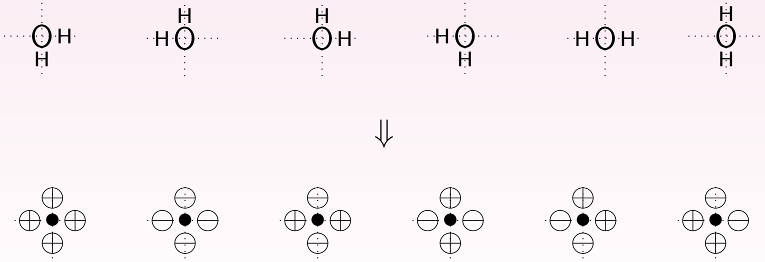
- 各頂点には 1 つの酸素原子 (O) を配置
- 各辺には 1 つの水素原子 (H) を配置
- 各酸素原子 (O) には 2 つの水素原子 (H) がつく



Pattern symbolization

パターンの記号化.

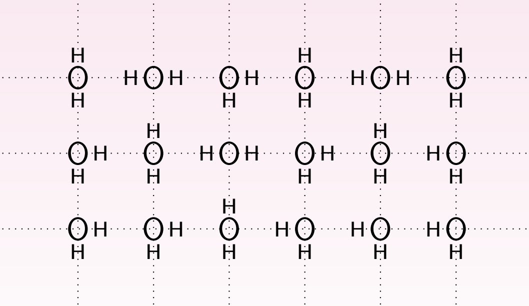
- 各頂点の酸素原子 (O) を ● にする
- 



2-dimensional Crystal lattice

2 次元結晶格子

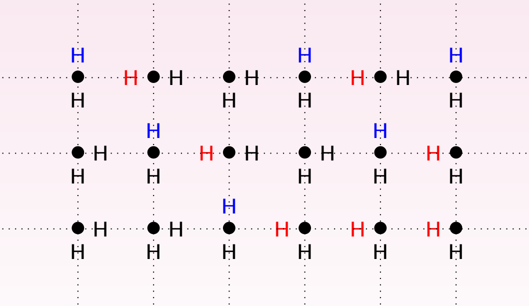
- 各頂点の酸素原子 (O) を • にする
- 各辺にパターンに従って ⊕, ⊖ をおく



2-dimensional Crystal lattice

2 次元結晶格子

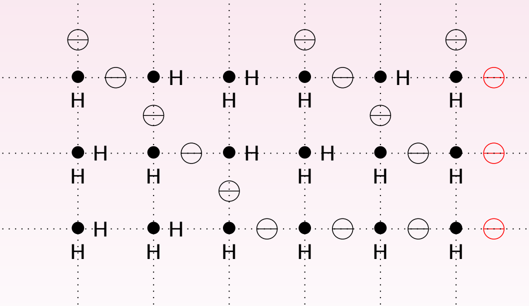
- 各頂点の酸素原子 (O) を • にする
- 各辺にパターンに従って ⊕, ⊖ をおく



2-dimensional Crystal lattice

2 次元結晶格子

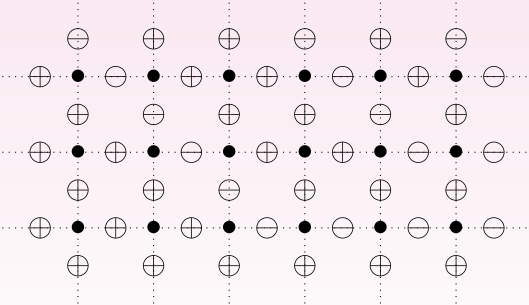
- 各頂点の酸素原子 (O) を • にする
- 各辺にパターンに従って $\oplus$, $\ominus$ をおく



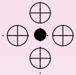
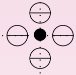
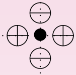
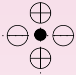
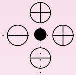
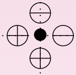
2-dimensional Crystal lattice

2 次元結晶格子

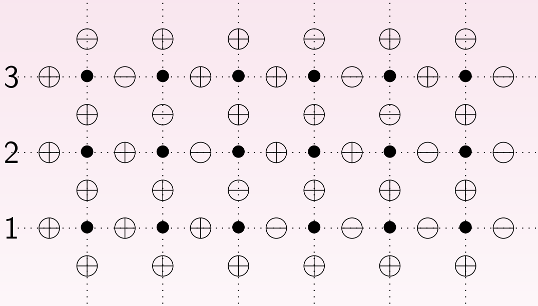
- 各頂点の酸素原子 (O) を $\bullet$ にする
- 各辺にパターンに従って $\oplus$, $\ominus$ をおく



Boltzmann weight

型	i 					
w	1	x_i	t_i	x_i	$x_i(t_i+1)$	1

$\mathfrak{s} =$



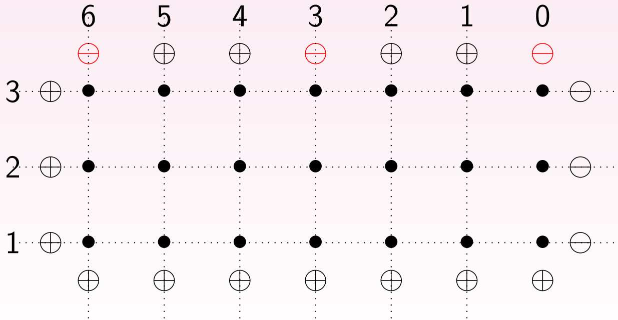
$$Z(\mathfrak{s}) = \prod_{v\in\mathfrak{s}} w(v,\mathfrak{s}) = 1\times x_3(t_3+1)\times 1\times 1\times x_3(t_3+1)\times 1$$
$$\times 1\times 1\times x_2(t_2+1)\times 1\times 1\times x_2$$
$$\times 1\times 1\times 1\times 1\times x_1\times x_1$$

Boundary condition

- 各頂点に $\bullet$ をおく
- 左端の列のすべての辺には $\oplus$, 一番下の行のすべての辺には $\oplus$, 右端の列のすべての辺には $\ominus$ をおく
- 一番上の行には, $\lambda_i + n - i$ 番目の列の辺には $\ominus$, それ以外の列の辺には $\oplus$ をおく

例. $\lambda = (4, 2, 0)$, $\lambda + (3-1, 3-2, 3-3) = (6, 3, 0)$.

$\mathfrak{S}_\lambda =$



Lattice and Schur polynomial

定義（分配関数)

$$Z(\mathfrak{S}_\lambda) = \sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}_\lambda} \prod_{v\in\mathfrak{s}} w(v,\mathfrak{s})$$

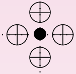
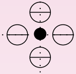
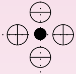
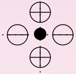
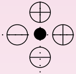
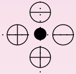
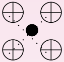
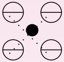
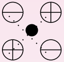
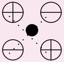
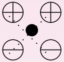
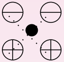
とする．$w(v,\mathfrak{s})$ は，配置 $\mathfrak{s}$ における点 v のウエイト

定理 (Brubaker-Bump-Friedberg, 2010)

分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に対し，

$$Z(\mathfrak{S}_\lambda) = \prod_{i<j}(x_i + t_i x_j) s_\lambda(x_1, \dots, x_n).$$

Yang-Baxter equation

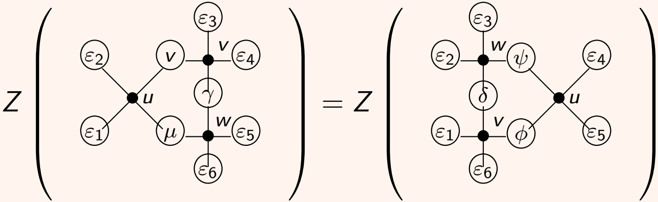
型 I						
型 II						
w	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2

定理 (Brubaker-Bump-Friedberg,2010)

$a_1(u) = a_1(v)a_2(w) + b_2(v)b_1(w)$,
$a_2(u) = b_1(v)b_2(w) + a_2(v)a_1(w)$,
$b_1(u) = b_1(v)a_2(w) - a_2(v)b_1(w)$,
$b_2(u) = -a_1(v)b_2(w) + b_2(v)a_1(w)$, $c_1(u) = c_1(v)c_2(w)$,
$c_1(u) = c_1(v)c_2(w)$ を満たすとき，次が成り立つ.

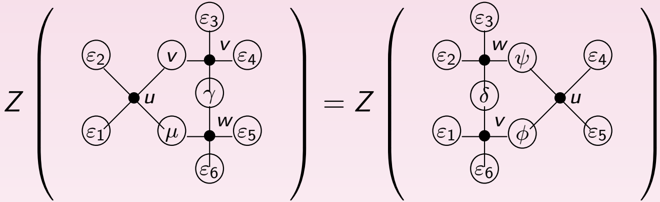
Yang-Baxter equation

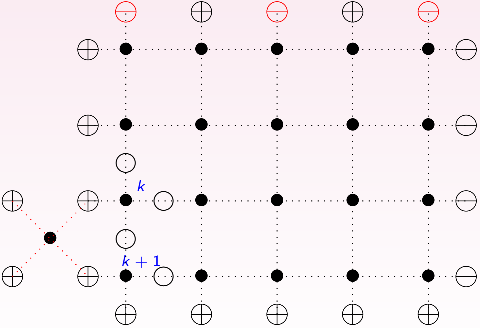
任意の符号 $\varepsilon_i \in \{\pm\}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ に対して,



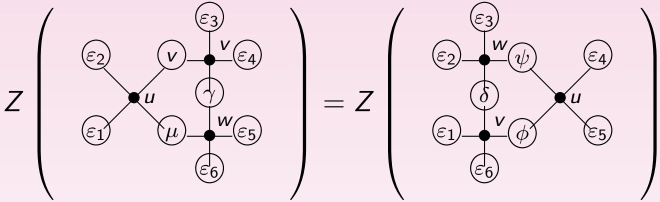
型 I	⊕ i ⊕ ● ⊕ ⊕	⊖ ⊖ ● ⊖ ⊖	⊖ ⊕ ● ⊕ ⊖	⊕ ⊖ ● ⊖ ⊕	⊕ ⊖ ● ⊕ ⊖	⊖ ⊕ ● ⊖ ⊕
w	1	x_i	t_i	x_i	$x_i(t_i+1)$	1
型 II	j ⊕ ⊕ i ● i ⊕ ⊕ j	⊖ ⊖ ● ⊖ ⊖	⊖ ⊕ ● ⊕ ⊖	⊕ ⊖ ● ⊖ ⊕	⊕ ⊕ ● ⊖ ⊖	⊖ ⊖ ● ⊕ ⊕
w	$t_j x_i + x_j$	$t_i x_j + x_i$	$t_i x_j - t_j x_i$	$x_i - x_j$	$(t_i+1)x_i$	$(t_j+1)x_j$

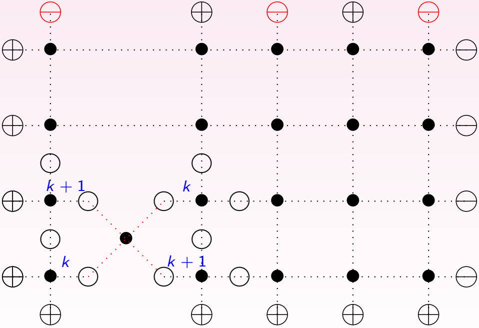
Application of Yang-Baxter equation



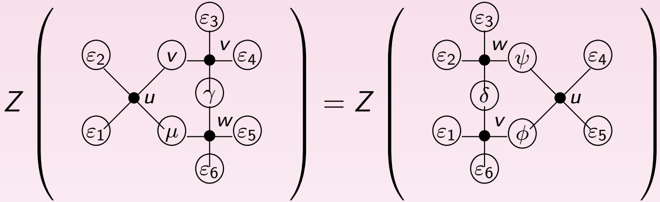


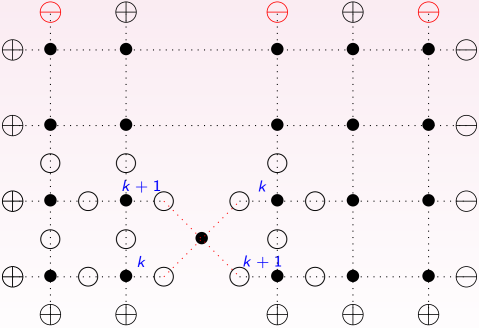
Application of Yang-Baxter equation



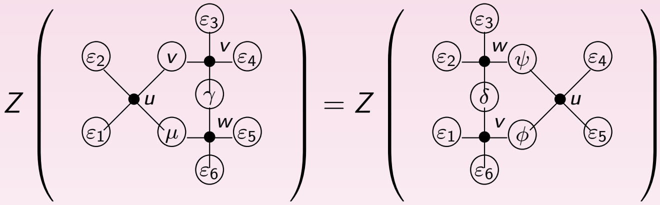


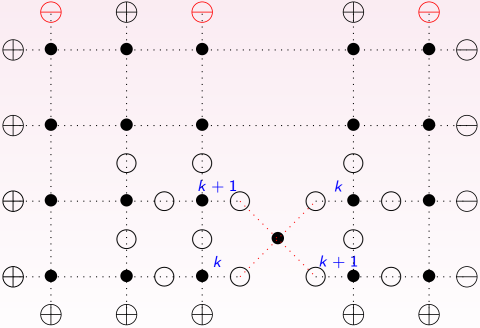
Application of Yang-Baxter equation



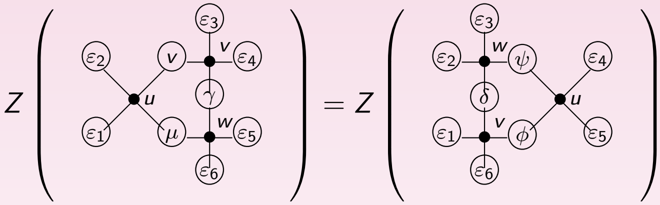


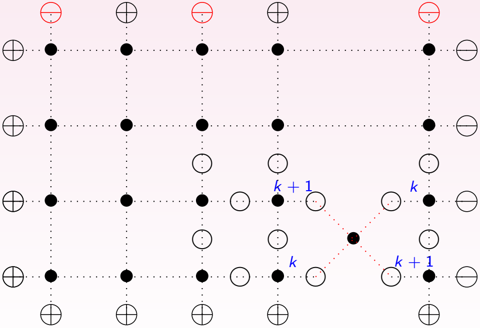
Application of Yang-Baxter equation



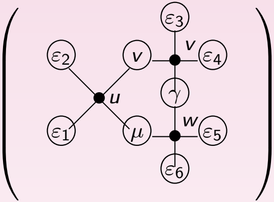


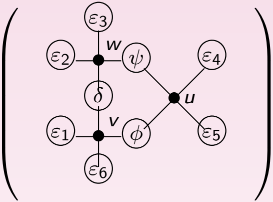
Application of Yang-Baxter equation

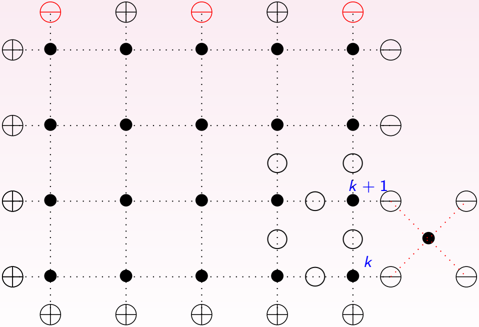




Application of Yang-Baxter equation

Z 

$= Z$ 



Application to Schur polynomial

型 II	$j \oplus \quad \oplus i$ $i \oplus \quad \oplus j$	$\ominus \quad \ominus$ $\ominus \quad \ominus$	$\ominus \quad \oplus$ $\oplus \quad \ominus$	$\oplus \quad \ominus$ $\ominus \quad \oplus$	$\oplus \quad \oplus$ $\ominus \quad \ominus$	$\ominus \quad \ominus$ $\oplus \quad \oplus$
w	$t_j x_i + x_j$	$t_i x_j + x_i$	$t_i x_j - t_j x_i$	$x_i - x_j$	$(t_i + 1)x_i$	$(t_j + 1)x_j$

$$Z(\mathfrak{S}_\lambda) = \prod_{i<j}(x_i + t_i x_j) s_\lambda(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

$$(t_{k+1}x_k + x_{k+1})Z(\mathfrak{S}_\lambda) = (t_k x_{k+1} + x_k)Z(\mathfrak{S}'_\lambda)$$

定理

s_λ は，$x_1, \ldots, x_n$ について対称で，t_i に独立な多項式である．

Zeta function

定義（リーマンゼータ関数）

$s \in \mathbb{C}$ に対し,

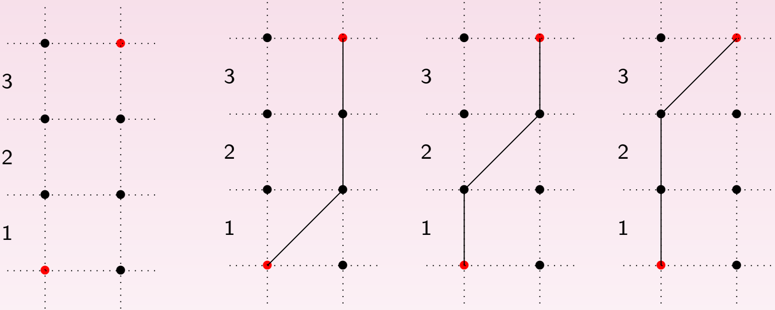
$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \cdots \quad (\Re(s) > 1)$$

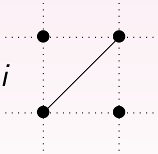
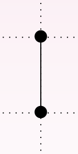
定義（有限リーマンゼータ関数）

$s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\zeta^N(s) = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \cdots \frac{1}{N^s}$$

Lattice and Riemann zeta function



型		
w	$1/i^s$	1

$$\sum \prod w(\ell) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}$$

Multiple zeta function

定義（多重ゼータ関数)

$s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\zeta(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{m_1 < \cdots < m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}},$$

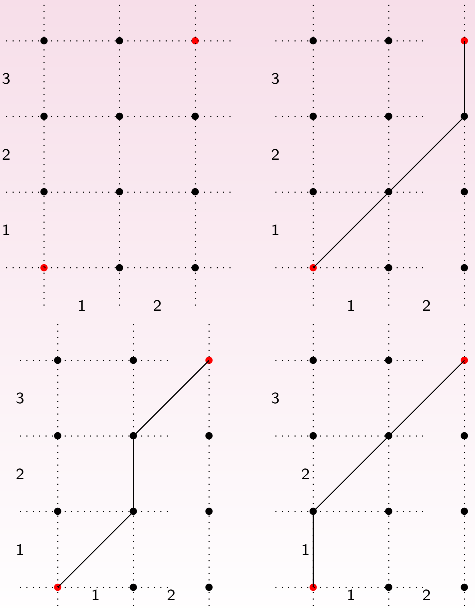
$$(\Re(s_1), \ldots, \Re(s_{n-1}) \geq 1 \text{ and } \Re(s_n) > 1)$$

定義（有限多重ゼータ関数)

$s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\zeta^N(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{m_1 < \cdots < m_n \leq N} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}},$$

Lattice and Multiple zeta function



$$\sum \prod w(\ell) = \frac{1}{1^{s_1}2^{s_2}} + \frac{1}{1^{s_1}3^{s_2}} + \frac{1}{2^{s_1}3^{s_2}}$$

Multiple zeta-star function

定義（多重ゼータスター関数)

$s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}$ に対し,

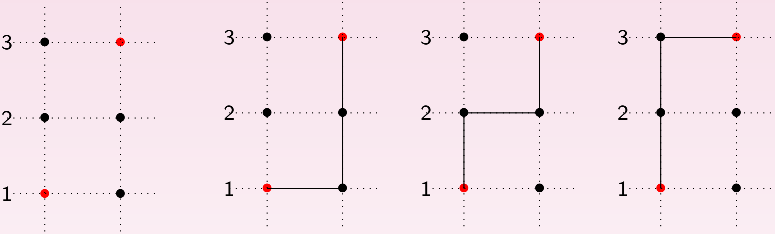
$$\zeta^\star(s_1, \dots, s_n) = \sum_{m_1 \le \cdots \le m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}},$$
$$(\Re(s_1), \dots, \Re(s_{n-1}) \ge 1 \text{ and } \Re(s_n) > 1)$$

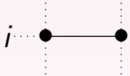
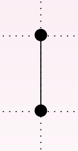
定義（有限多重ゼータスター関数)

$s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\zeta^{\star,N}(s_1, \dots, s_n) = \sum_{m_1 \le \cdots \le m_n \le N} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}},$$

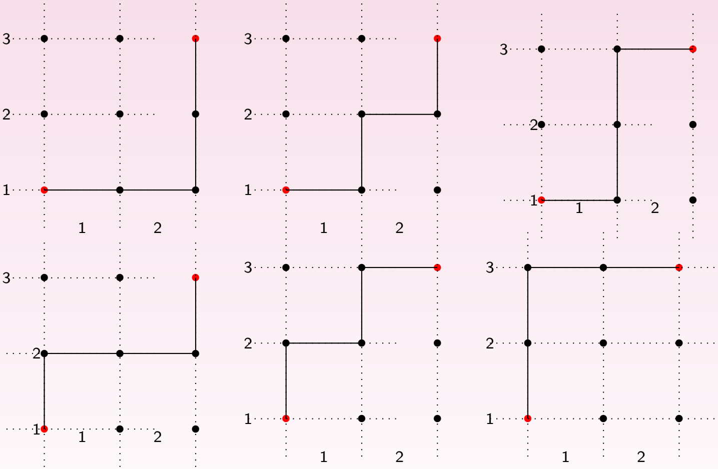
Lattice and Riemann zeta function 2



型		
w	$1/i^s$	1

$$\sum \prod w(\ell) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}$$

Lattice and Multiple zeta-star function



$$\sum \prod w(\ell) = \frac{1}{1^{s_1} 1^{s_2}} + \frac{1}{1^{s_1} 2^{s_2}} + \frac{1}{1^{s_1} 3^{s_2}} + \frac{1}{2^{s_1} 2^{s_2}} + \frac{1}{2^{s_1} 3^{s_2}} + \frac{1}{3^{s_1} 3^{s_2}}$$

Relation beween Mutiple zeta and zeta-star functions

多重ゼータ関数は多重ゼータスター関数の線形結合で表される．（逆も同様）

例.

- $\zeta^\star(s_1, s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_1 + s_2)$,
- $\zeta(s_1, s_2) = \zeta^\star(s_1, s_2) - \zeta^\star(s_1 + s_2)$,
- $\zeta^\star(s_1, s_2, s_3) = \zeta(s_1, s_2, s_3) + \zeta(s_1 + s_2, s_3) + \zeta(s_1, s_2 + s_3) + \zeta(s_1 + s_2 + s_3)$,
- $\zeta(s_1, s_2, s_3) = \zeta^\star(s_1, s_2, s_3) - \zeta^\star(s_1 + s_2, s_3) - \zeta^\star(s_1, s_2 + s_3) + \zeta^\star(s_1 + s_2 + s_3)$.

Algebraic relations 1

その他の関係式の例.

- $\zeta^\star(a,b) = \zeta(a)\zeta(b) - \zeta(b,a)$.
- $\zeta(a,b) = \zeta^\star(a)\zeta^\star(b) - \zeta^\star(b,a)$.

定理

$s_1,\dots,s_n \in \mathbb{C}$ $(\Re(s_1),\dots,\Re(s_n) > 1)$ に対し，次が成り立つ.

(1) $\zeta^\star(s_1,\dots,s_n) =$

$$\begin{vmatrix} \zeta(s_1) & \zeta(s_2,s_1) & \cdots & \cdots & \zeta(s_n,\dots,s_2,s_1) \\ 1 & \zeta(s_2) & \cdots & \cdots & \zeta(s_n,\dots,s_2) \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots \quad 1 & \zeta(s_{n-1}) & \zeta(s_n,s_{n-1}) \\ \text{\huge 0} & & & 1 & \zeta(s_n) \end{vmatrix}.$$

Algebraic relations 2

定理

$s_1,\dots,s_n\in\mathbb{C}$ $(\Re(s_1),\dots,\Re(s_n)>1)$ に対し，以下が成り立つ．

(2) $\zeta(s_1,\dots,s_n)=$

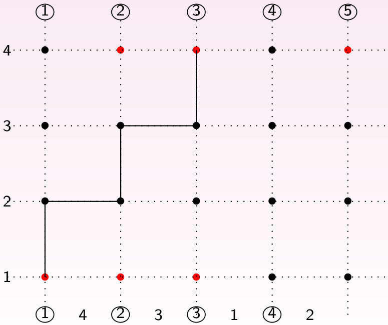
$$\begin{vmatrix}\zeta^\star(s_1) & \zeta^\star(s_2,s_1) & \cdots & \cdots & \zeta^\star(s_n,\dots,s_2,s_1)\\ 1 & \zeta^\star(s_2) & \cdots & \cdots & \zeta^\star(s_n,\dots,s_2)\\ & 1 & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots\ 1 & \zeta^\star(s_{n-1}) & \zeta^\star(s_n,s_{n-1})\\ \text{\huge 0} & & & 1 & \zeta^\star(s_n)\end{vmatrix}$$

Application to Multiple zeta function

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, ある N に対し，以下のように定める．

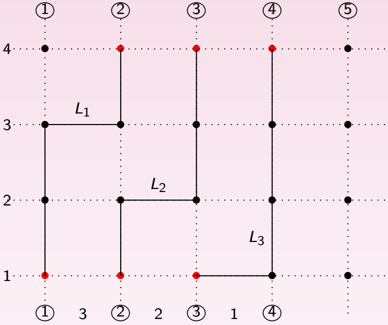
- 頂点の座標は，左下を $(0,0)$ とし，各列は上に，各行は右に増加する
- 経路の始点は $(1,1), (2,1), \ldots, (n,1)$ とする
- 経路の終点は $(\lambda_i + n - i + 1, N)$ とする

例．$\lambda = (2,1,1)$



Application to Multiple zeta function

例. $\lambda = (1, 1, 1)$

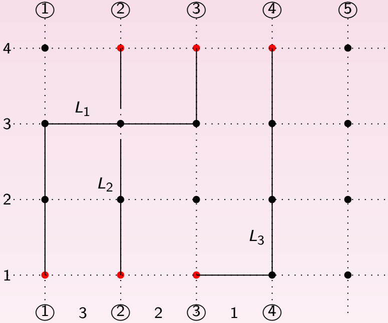


各 path L_i に対する分割関数の積：

$$\prod_{L_i} w(L_i) = \zeta^{\star,4}(s_3)\zeta^{\star,4}(s_2)\zeta^{\star,4}(s_1) = \zeta^{\star}(s_3)\zeta^{\star}(s_2)\zeta^{\star}(s_1)$$

Application to Multiple zeta function

例. $\lambda = (1,1,1)$
$\sigma = (1,2)$



補題

$$\sum_{\sigma \in S_3'} \prod_{L_i} \varepsilon_\sigma w(L_i) = \begin{vmatrix} \zeta^\star(s_1) & \zeta^\star(s_2,s_1) & \zeta^\star(s_3,s_2,s_1) \\ 1 & \zeta^\star(s_2) & \zeta^\star(s_3,s_2) \\ 0 & 1 & \zeta^\star(s_3) \end{vmatrix}$$

Property of Multiple zeta function

補題

分割 $\lambda = (1,1,1)$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ に対し，次が成り立つ．

$$\zeta(\boldsymbol{s}) = \zeta(s_1, s_2, s_3) = \sum_{\sigma \in S'_n} \prod_{L_i} \varepsilon_\sigma w(L_i)$$

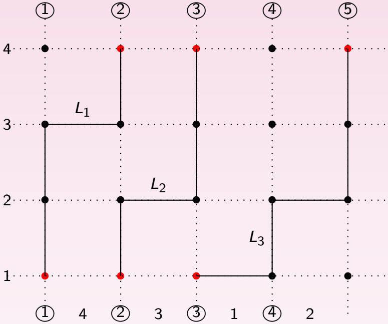
定理

分割 $\lambda = (1,1,1)$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ に対し，次が成り立つ．

$$\zeta(\boldsymbol{s}) = \zeta(s_1, s_2, s_3) = \begin{vmatrix} \zeta^\star(s_1) & \zeta^\star(s_2, s_1) & \zeta^\star(s_3, s_2, s_1) \\ 1 & \zeta^\star(s_2) & \zeta^\star(s_3, s_2) \\ 0 & 1 & \zeta^\star(s_3) \end{vmatrix}$$

Application to Multiple zeta function 2

例. $\lambda = (2, 1, 1)$

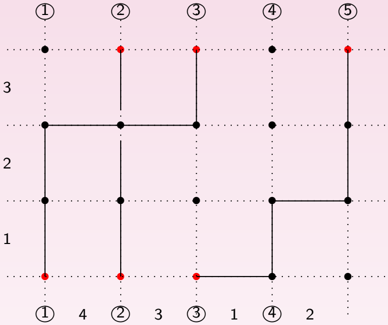


各 path L_i の始点と終点の横方向の差がそれぞれ，1, 1, 2 なので

$$\prod_{L_i} w(L_i) = \zeta^\star(s_4)\zeta^\star(s_3)\zeta^\star(s_1, s_2).$$

Application to Multiple zeta function 2

例. $\lambda = (2, 1, 1)$
$\sigma = (1, 2)$



補題

$$\sum_{\sigma \in S_3'} \prod_{L_i} \varepsilon_\sigma w(L_i) = \begin{vmatrix} \zeta^\star(s_1, s_2) & \zeta^\star(s_3, s_1, s_2) & \zeta^\star(s_4, s_3, s_1, 2) \\ 1 & \zeta^\star(s_3) & \zeta^\star(s_4, s_3) \\ 0 & 1 & \zeta^\star(s_4) \end{vmatrix}$$

New kind of Multiple zeta function

補題

分割 $\lambda = (2,1,1)$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ に対し，次が成り立つ.

$$\sum_{\substack{m_{11} \leq m_{12} \\ \wedge \\ m_{21} \\ \wedge \\ m_{31}}} \frac{1}{{m_{11}}^{s_1}{m_{12}}^{s_2}{m_{21}}^{s_3}{m_{31}}^{s_4}} = \sum_{\sigma \in S_3'} \prod_{L_i} \varepsilon_\sigma w(L_i)$$

Schur multiple zeta function

- 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ に対し，
  $M = (m_{ij}) \in \mathbb{N}^{|\lambda|}$, $\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in \mathbb{C}^{|\lambda|}$ を次のように書く．

$\lambda = (3, 3, 2)$

$$M = \begin{array}{|c|c|c|}\hline m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ \hline m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ \hline m_{31} & m_{32} & \\ \hline \end{array} \qquad \boldsymbol{s} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ \hline s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ \hline s_{31} & s_{32} & \\ \hline \end{array}$$

Schur 多重ゼータ関数

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) = \sum_M \prod_{(i,j)} \frac{1}{{m_{ij}}^{s_{ij}}}$$

で定義する．ここで，$M = (m_{ij})_{(i,j)}$ は，$m_{ij} \leq m_{i,j+1}$, $m_{ij} < m_{i+1,j}$ を満たす．

Schur polyunomial

- 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots)$ に対し, $M = (m_{ij}) \in \mathbb{N}^{|\lambda|}$ を次のように書く.

$\lambda = (3, 3, 2)$

$M =$

m_{11}	m_{12}	m_{13}
m_{21}	m_{22}	m_{23}
m_{31}	m_{32}	

命題 (Schur 多項式)

$$s_\lambda = s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \sum_M \prod_{(i,j)} x_{m_{ij}},$$

で表される．ここで，$M = (m_{ij})_{(i,j)}$ は，$m_{ij} \leq m_{i,j+1}$, $m_{ij} < m_{i+1,j}$ を満たす.

Jacobi-Trudi type formula for ζ_λ

定理. (N.–Phuksuwan–Yamasaki, 2018)

$\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$(対角成分の変数が同じであるという条件を満たす収束領域）. $s_{ij} = a_{j-i}$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\Re(s_{i,\lambda_i}) > 1 (1 \le i < \lambda_1{}')$ に対し,

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) = \det\left[\zeta^\star(a_{-j+1}, a_{-j+2}, \dots, a_{-j+(\lambda_i-i+j)})\right]_{1\le i,j\le\lambda_1'} .$$

(2) $\Re(s_{i,\lambda_i'}) > 1 \ (1 \le i < \lambda_1)$ に対し,

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) = \det\left[\zeta(a_{j-1}, a_{j-2}, \dots, a_{j-(\lambda_i'-i+j)})\right]_{1\le i,j\le\lambda_1} .$$

ただし, λ' は λ の共役を表す.

Thank you very much

ご清聴ありがとうございました.