ロジャーズ=ラマヌジャン型恒等式とアフィン・リー代数の関係性について

伊藤歌那

東京工業大学情報理工学院, RIKEN AIP JRA

August 28, 2023

ロジャーズ=ラマヌジャン恒等式

ロジャーズ=ラマヌジャン恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}.$$

ロジャーズが 1890 年代に発見、後年ラマヌジャンが再発見。

ポッホハマー記号:

$$(a;q)_n = \prod_{0\le i\le n-1} (1-aq^i), \qquad (a_1,\cdots,a_k;q)_n = \prod_{1\le j\le k} (a_j;q)_n.$$

G・H・ハーディ「ロジャーズ=ラマヌジャン恒等式に勝る美しい公式は見つけ難いだろう」

ロジャーズ=ラマヌジャン分割定理

ロジャーズ=ラマヌジャン分割定理

Par: 非負整数の分割の集合、$S_1, S_2, T^{(m)}_{k_1,\dots,k_i} \subset \mathrm{Par}$: 以下の通り。
$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $|S_1(n)| = |T^{(5)}_{1,4}(n)|$, $|S_2(n)| = |T^{(5)}_{2,3}(n)|$ が成り立つ。
$S \subset \mathrm{Par}$ に対して $S(n)$ は S に属する n の分割の集合。

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_l) \in \mathrm{Par} \mid l \geq 0,\ \lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 2\},\\
S_2 &= \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_l) \in S_1 \mid \lambda_l \geq 2\},\\
T^{(m)}_{k_1,\dots,k_i} &= \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_l) \in \mathrm{Par} \mid \lambda_i \equiv k_1, \dots, k_i \pmod{m}\}.
\end{aligned}$$

ロジャーズ=ラマヌジャン恒等式と同値。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} |S_1(n)| q^n, \qquad \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} |T^{(5)}_{1,4}(n)| q^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} |S_2(n)| q^n, \qquad \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} |T^{(5)}_{2,3}(n)| q^n.$$

RR 恒等式と $A_1^{(1)}$ 型レベル 3 の標準加群

Lepowsky-Milne (1978)

$A_1^{(1)}$ 型レベル 3 の標準加群の指標と RR 恒等式の無限積との類似を発見。

$$\mathrm{ch}(L(2\Lambda_0+\Lambda_1)) = \frac{1}{(q;q^2)_\infty (q,q^4;q^5)_\infty},$$
$$\mathrm{ch}(L(3\Lambda_0)) = \frac{1}{(q;q^2)_\infty (q^2,q^3;q^5)_\infty}.$$

$\Rightarrow$ アフィン・リー環を用いたロジャーズ=ラマヌジャン型恒等式の研究の端緒になった。

Lepowsky-Wilson

$L = L(2\Lambda_0+\Lambda_1), L(3\Lambda_0)$ の真空空間 $\Omega(L)$ の指標 (主指標) から RR 恒等式を導出。
無限積: Lepowsky's numerator formula,　無限和: 頂点作用素 (Z-作用素)

期待

アフィン・リー代数の各標準加群から、RR 型の恒等式並びに分割定理が得られる。

$A_{\mathrm{odd}}^{(2)}$ 型レベル 2 の場合に着目。

型	RR 恒等式	Z 作用素との関係
$A_5^{(2)}$	Göllnitz-Gordon 恒等式	Kanade ('18)
$A_7^{(2)}$	Rogers-Ramanujan 恒等式	Bos-Misra ('94)
$A_9^{(2)}$	Kanade-Russell ('19)	Ito
$A_{11}^{(2)}$	Nandi ('14)	未解決
$A_{13}^{(2)}$	Takigiku-Tsuchioka ('21)	未解決

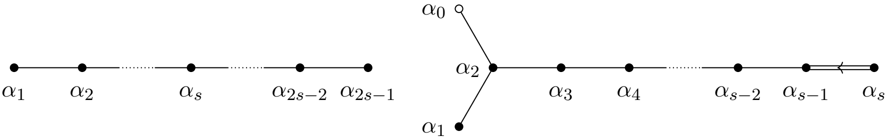
リー代数とは

リー代数

ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ で双線型写像 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}:(x,y)\mapsto[x,y]$ が与えられていて、以下を満たすもの。

1. $[x,x]=0$ for $\forall x\in\mathfrak{g}$,
2. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ for $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.

有限次元単純リー代数は A 型から G 型までに分類される。有限次元単純リー代数に「ひねり」を加えてアフィン・リー代数が構成される。



A_{2s-1} 型及び $A_{2s-1}^{(2)}$ 型のディンキン図形

$\Omega(L)$ の生成系

Fact

最高ウェイト加群 L の真空空間 $\Omega(L)$ は以下の生成系を有する。

$$\{Z_{i_1}(\alpha_{j_1})\cdots Z_{i_l}(\alpha_{j_l})v_L \mid i_1,\cdots,i_l \in \mathbb{Z},\ \alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_l} \in \Phi\}.$$

$\Rightarrow$ ここから $A^{(2)}_{2s-1}$ 型の場合に分割の条件に沿う形で範囲を絞っていく。

$$\Phi \to \{\beta_k, \alpha_s \mid 1 \leq k \leq s-1\} \qquad (\beta_k = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k)$$

Fact

$1 \leq 2i-1 \leq s$ を満たす i に対して $\Lambda^{(i)} = \delta_{1i}\Lambda_0 + \Lambda_{2i-1}$ とすると、
$L(\Lambda^{(i)}) \subset L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_1)$ が成り立つ。$L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_1)$ 上で、
$Z_{\mathrm{odd}}(\beta_k) = Z_{\mathrm{even}}(\alpha_s) = 0$ が成り立つ。

先行研究 ($A_5^{(2)}$ 型レベル 2)

Göllnitz-Gordon 恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = \frac{1}{(q,q^4,q^7;q^8)_\infty},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+2)}(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = \frac{1}{(q^3,q^4,q^5;q^8)_\infty}.$$

Göllnitz 分割定理

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $|G_1(n)| = |T^{(8)}_{1,4,7}(n)|$, $|G_2(n)| = |T^{(8)}_{3,4,5}(n)|$ が成り立つ。

$$G_1 = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_l) \in S_1 \mid \lambda_j, \lambda_{j+1} \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow \lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 4\},$$
$$G_2 = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_l) \in G_1 \mid \lambda_l \geq 3\}.$$

$$Z_{2k-1}(\alpha_3) = Z_{2k-1}, \quad Z_{2k}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5) = Z_{2k}$$ とする。

Kanade (2018)

$A_5^{(2)}$ 型の場合、$L(\Lambda^{(i)})$ の真空空間 $\Omega(\Lambda^{(i)})$ は以下の集合を基底に持つ。ただし $i=1,2$ であり v_i は $L(\Lambda^{(i)})$ の最高ウェイトベクトルである。

$$\{Z_{i_1}\cdots Z_{i_l}v_i \mid l \geq 0,\ (-i_1,\ldots,-i_l) \in G_i\}.$$

Z-monomial の整理

$l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ として、$\mathbb{Z}^l$ 上で順序 T を以下の様に定める。

$$(i_1, \ldots, i_l) \leq_T (j_1, \ldots, j_l) \Leftrightarrow 1 \leq \forall n \leq l,\ i_n + \cdots + i_l \leq j_n + \cdots + j_l.$$

添え字が $(i_1, \ldots, i_l) \leq_T (0, \ldots, 0)$ を満たさない Z-monomial は排除できる。

従来の証明方法

Z-monomial を「長さ $\rightarrow T$」の順で整理

$\Rightarrow A_{2s-1}^{(2)}$ 型の場合一般で綺麗に整理するのは難しい

主定理で用いた証明方法

Z-monomial を「奇数パートの個数 $\rightarrow$ 長さ $\rightarrow T$」の順で整理

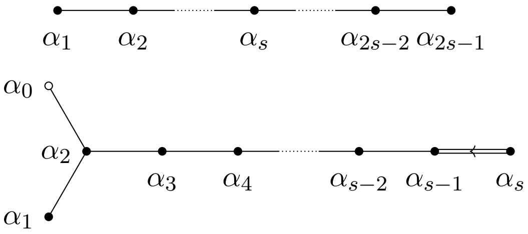
(cf. Generalized commutation relation)

主定理 ($A^{(2)}_{\mathrm{odd}}$ 型レベル 2 の場合)

主定理

$A^{(2)}_{2s-1}$ 型の場合を考える。$1 \leq 2i-1 \leq s$ を満たす i に対して $L = L(\Lambda^{(i)})$ の真空空間 $\Omega(L)$ は以下の生成系を有する。ただし v_L は L の最高ウェイトベクトルであり、$Z_{2k-1}(\alpha_s) = Z_{2k-1}$, $Z_{2k}(\alpha_1) = Z_{2k}$ である。

$$\{Z_{i_1} \cdots Z_{i_l} v_L \mid l \geq 0,\ i_1, \ldots, i_l \in \mathbb{Z},\ i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq -1\}.$$



$Z_{2k-1}(\alpha_s)=Z_{2k-1}$, $Z_{2k}(\alpha_1)=Z_{2k}$ とすると、
$A_5^{(2)}$ 型, $A_7^{(2)}$ 型, $A_9^{(2)}$ 型の場合でそれぞれ G 分割定理、RR 分割定理、Kanade=Russell (2019) による分割定理の予想 (の和サイド) の分割条件に沿う様に真空空間の基底を表示できる。

$A_9^{(2)}$ 型の場合 (Kanade=Russell (2019) による予想)

共通の条件

1. $i_k - i_{k+1} \neq 1$,
2. $i_k, i_{k+1} \in 2\mathbb{Z}-1 \Rightarrow i_k \neq i_{k+1}$,
3. $(i_k, i_{k+1} \in 2\mathbb{Z},\ i_k = i_{k+1}) \Rightarrow (i_k - i_{k+2} \geq 4,\ i_{k-1} - i_{k+1} \geq 4)$.

個別の条件

1. $\Lambda^{(1)}$ に対して $(i_{l-1}, i_l) \neq (2,2)$,
2. $\Lambda^{(2)}$ に対して $i_l \neq 1$,
3. $\Lambda^{(3)}$ に対して $i_l \neq 1,2,3$.