

ハムサンドイッチの定理

高橋悠貴 (Pablo Soberón 教授と共同研究)

August 23, 2023



ピクニックにて

あなたは友達と二人でピクニックにきました！ が、いくつか問題が…

- サンドイッチ（ハム、チーズ、パン）はふたりで一個
- 持ってくる過程でサンドイッチはばらばらに. サンドイッチは動かさない
- 二人とも几帳面なので、それぞれの材料を完璧に半分ずつにしたい

このばらばらになってしまったサンドイッチを包丁で（平面に沿って）一回切ってそれぞれの材料を半分ずつに切れるでしょうか？

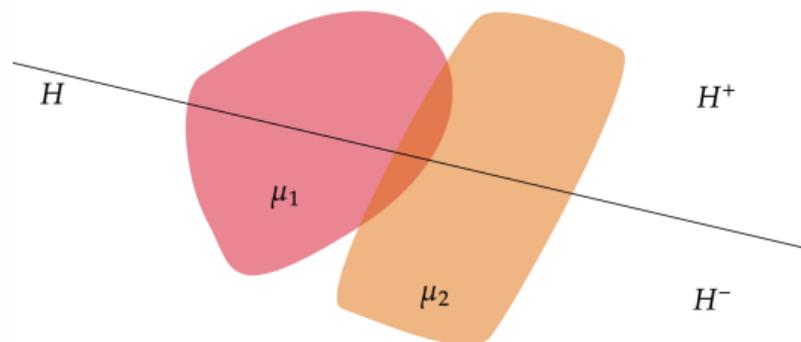


ハムサンドイッチの定理

定理

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ を \mathbb{R}^d 上の有限測度とする. そのとき以下の条件を満たす \mathbb{R}^d 上の超平面 H とその閉半空間 H^+ と H^- が存在する:

$$\mu_i(H^+) \geq \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d), \quad \mu_i(H^-) \geq \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d) \quad i = 1, \dots, d.$$



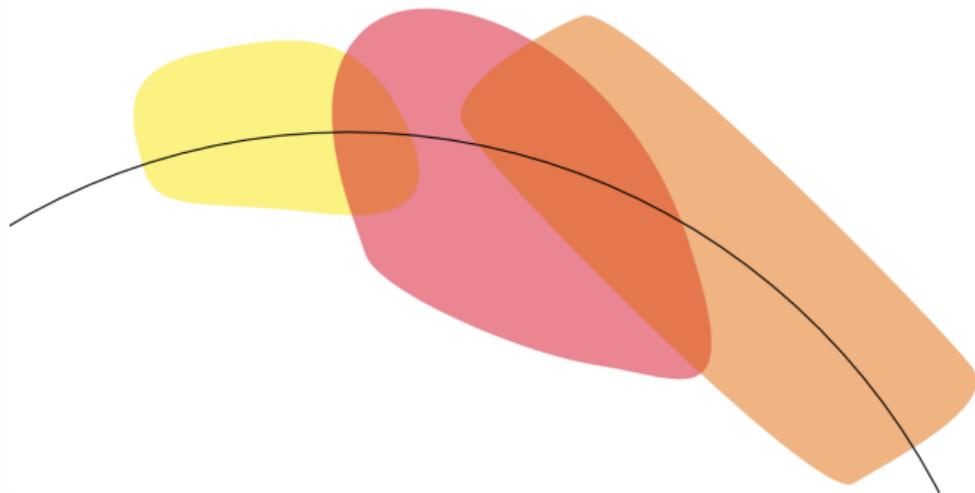
研究課題

$d + 1$ 個以上の \mathbb{R}^d 上の有限測度を, 超平面より複雑な分割を使うことでそれぞれ二等分できるか?

= もっと材料の多いサンドイッチを, ナイフの形を複雑にすることによってそれぞれの材料を二等分に切ることができるか?

先行研究

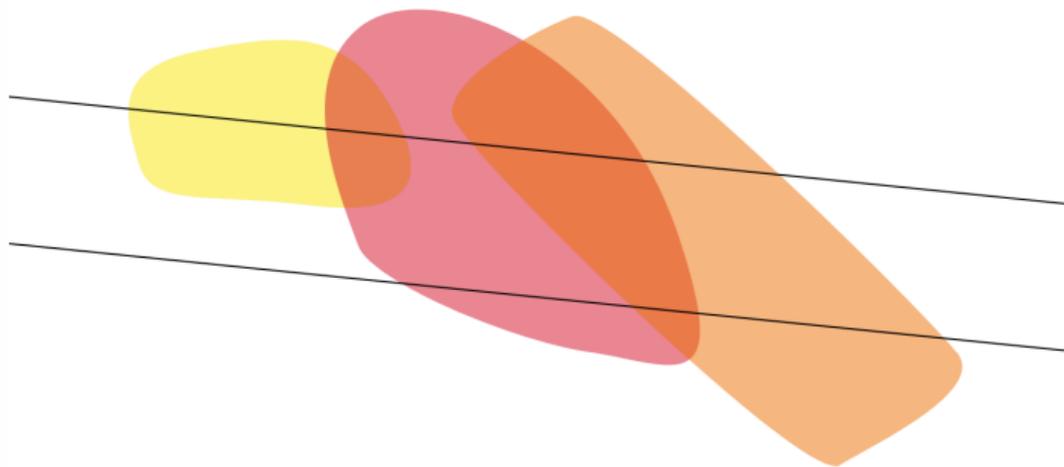
- $k - 1$ 次多項式 (k 個の \mathbb{R}^2 上の有限測度)
- $d - 1$ 次元球面 S^{d-1} ($d + 1$ 個の \mathbb{R}^d 上の有限測度)



並行超平面サンドイッチの定理

定理

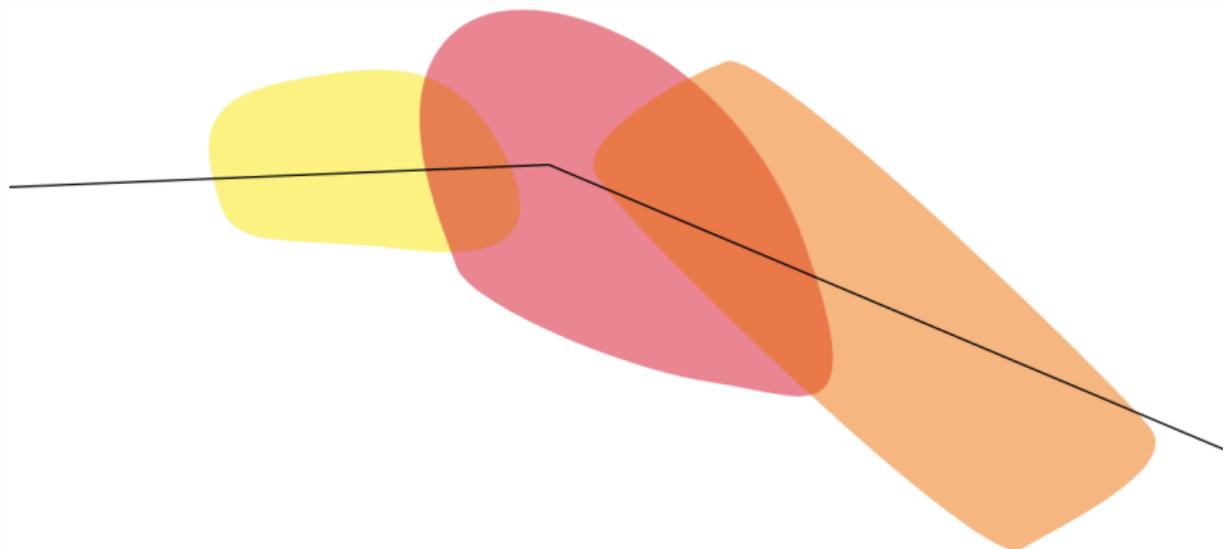
任意の $d + 1$ 個の \mathbb{R}^d 上の有限測度（ルベーグ測度に関して絶対連続）に対し，それぞれの測度が半分になるような二つの並行超平面が存在する。



V字サンドイッチの定理

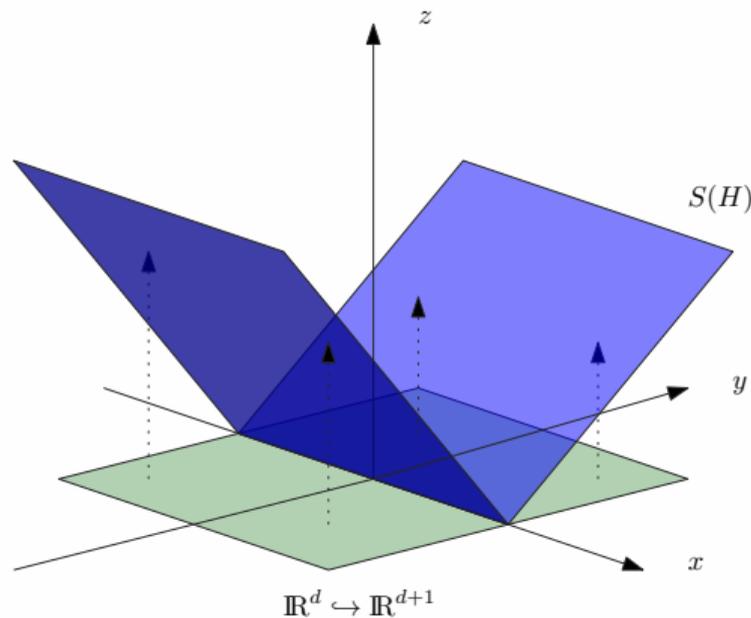
定理

任意の $d + 1$ 個の \mathbb{R}^d 上の有限測度（ルベーグ測度に関して絶対連続）に対し，それぞれの測度が半分になるようなV字が存在する．



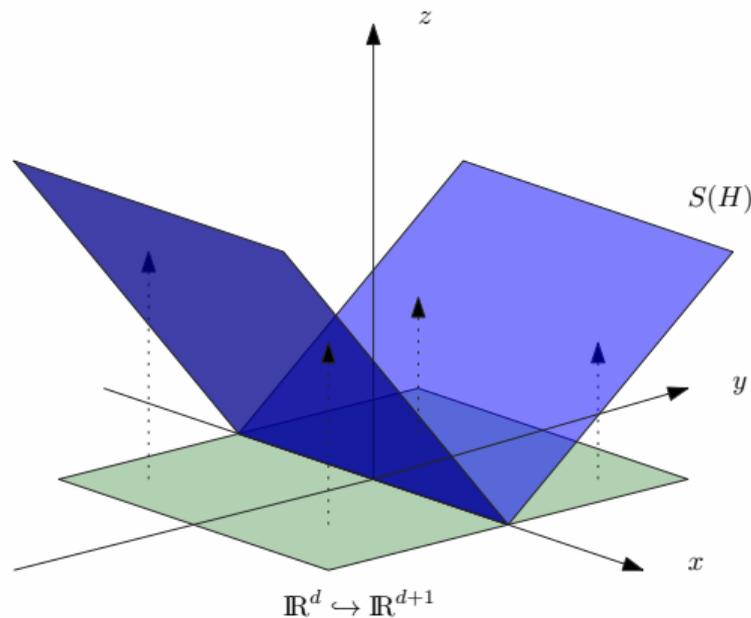
V字サンドイッチ 証明

- ① $d + 1$ 個の測度を \mathbb{R}^{d+1} 上に持ち上げる。
- ② ハムサンドイッチの定理を \mathbb{R}^{d+1} 上の $d + 1$ 個の測度に適用し、 \mathbb{R}^{d+1} 超平面でそれぞれの測度を二等分する切り口を見つける。
- ③ \mathbb{R}^{d+1} 上の測度とその切り口を \mathbb{R}^d に投影して戻す。



並行超平面サンドイッチ 証明

アイデア: V 字サンドイッチの持ち上げ方を工夫し, ボルスク・ウラムの定理の一種を利用して \mathbb{R}^d への投影が並行超平面になるような切り口を見つける.

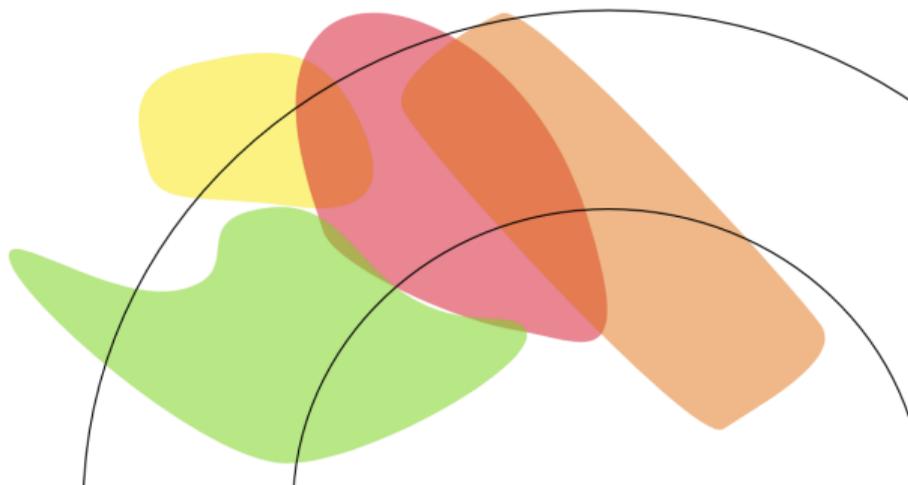


ベーグルサンドイッチの定理

定理

任意の $d + 2$ 個の \mathbb{R}^d 上の有限測度（ルベーグ測度に関して絶対連続）に対し、それぞれの測度が半分になるような二つの同心球が存在する。

これらの測度を \mathbb{R}^{d+1} 上の回転放物面に持ち上げて並行超平面サンドイッチを適用すると目的の同心球を得られる。



現在の研究課題

数理論理学の一分野であるモデル理論が専門. 特に, モデル理論の Stability Theory と他分野 (グラフ理論、加法的組合せ論、機械学習) のかわりに興味がある. 例えば以下の概念など.

- Szemerédi's graph regularity lemma
- Green's arithmetic regularity lemma in \mathbb{F}_p^n , Fourier-analytic methods in additive combinatorics
- PAC learnability, VC dimension

謝辞

この研究はニューヨーク市立大学バルーク校の Pablo Soberón 教授と共同で, NYC Discrete Math REU の一部として行われました.

Pablo Soberón and Yuki Takahashi. “Lifting Methods in Mass Partition Problems”. In: *International Mathematics Research Notices* (Aug. 2022). rnac224. URL: <https://doi.org/10.1093/imrn/rnac224>